



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MIILA MARTIKAINEN

SATELLIITIN RADAN ENNUSTAMINEN JA ENNUSTUSVIR-
HEEN MALLINTAMINEN GAUSSIN MIKSTUURIN AVULLA

Diplomityö

Tarkastajat: Prof. Robert Piché ja
TkT Simo Ali-Löytty
Tarkastajat ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden ja ympäristötekniikan
tiedekunnan kokouksessa 15.8.2012

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

MARTIKAINEN, MIILA: Satelliitin radan ennustaminen ja ennustusvirheen mallintaminen Gaussin mikstuurin avulla

Diplomityö, 57 sivua, 3 liitesivua

marraskuu 2013

Pääaine: Matematiikka

Tarkastajat: professori Robert Piché ja TkT Simo Ali-Löytty

Avainsanat: GPS-satelliitti, ennustus, Gaussin mikstuuri

Tämä työ käsittelee GPS-satelliitin radan ennustusta käyttäen Bayesiläistä suodatusta. Satelliitin rata ennustetaan muodostamalla satelliitille liikeyhtälö huomioimalla suurimmat satelliittiin vaikuttavat voimat ja ratkaisemalla numeerisesti tämä liikeyhtälö. Mittauksina käytetään satelliitin broadcast-efemeridejä, joista saadaan satelliitin nopeus- ja paikkatiedot. Työ keskittyy erityisesti radan ennustukseen käyttäen Gaussin mikstuuri -suodatinta. Vertailukohtana saaduille tuloksille esitetään laajennetulla Kalmanin suodattimella (Extended Kalman Filter, EKF) saadut rataennustustulokset.

Gaussisen jakauman jakamiseen Gaussin mikstuurin komponentteihin on olemassa useita eri menetelmiä. Tässä työssä komponenttien jakamiseen on käytetty sigma-pistemenetelmää. Työssä on ennustettu satelliitin rata kahdella eri tavalla käyttäen Gaussin mikstuuri -suodatinta. Ensimmäisessä tavassa (SPGM1) komponentit jaetaan jo ennen alkutilan sovitusta eli ennen kuin on saatu yhtään mittausta broadcast-efemeridistä. Toisessa tavassa (SPGM2) komponentit jaetaan alkutilan sovituksen jälkeen, ennustusvaiheeseen siirryttäessä.

Kaikilla kolmella menetelmällä saadaan samankaltaisia tuloksia. SPGM1-menetelmällä satelliitin radan ennustusvirhe on hieman suurempi kuin SPGM2- ja EKF-menetelmillä. Kaikki käytetyt menetelmät antavat realistisen arvion ennustusvirheelle.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Science and Engineering

MARTIKAINEN, MIILA: Satellite orbit prediction and prediction error modeling using Gaussian mixture distributions

Master of Science Thesis, 57 pages, 3 Appendix pages

November 2013

Major: Mathematics

Examiners: Prof. Robert Piché and D.Tech. Simo Ali-Löytty

Keywords: GPS satellite, prediction, Gaussian mixture

In this thesis the orbit of a GPS satellite is predicted using Bayesian filtering. Satellite's orbit is predicted by formulating the satellite's equation of motion by taking into consideration the most significant forces acting on the satellite, and solving this equation numerically. Broadcast ephemerides are used as measurements to get information about the satellite's position and velocity. This thesis focuses on predicting the orbit by using Gaussian mixture filter. The results are compared with the ones obtained by using extended Kalman filter (EKF).

There are several ways to split Gaussian distribution into Gaussian mixture components. In this thesis the components are split by using sigma point algorithm. The satellite orbit is predicted on two different methods using the Gaussian mixture filter. In the first method (SPGM1) the components are split before the initial state fitting, which is before getting any measurement from broadcast ephemeris. In the second method (SPGM2) the components are split after the initial state fitting, before the orbit prediction.

The results are similar for all the used methods. By using method SPGM1 the prediction error is a bit larger than using methods SPGM2 and EKF. The proposed methods give realistic prediction error estimates.

Alkusanat

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston henkilökohtaisen paikannuksen algoritmien tutkimusryhmässä. Tutkimuksen on rahoittanut Nokia.

Haluan kiittää työni ohjaajaa tohtori Simo Ali-Löyttyä neuvoista, lukuisista keskusteluista ja kannustuksesta työn aikana. Kiitän myös työn toista ohjaajaa professori Robert Pichéä työn ohjaamisesta ja mielenkiintoisesta diplomityöaiheesta.

Kiitän henkilökohtaisen paikannuksen tutkimusryhmän jäseniä. Erityisesti haluan kiittää Juha Ala-Luhtalaa monista neuvoista ja keskusteluista työhön liittyen. Lisäksi kiitän Mari Seppästä sekä Henri Nurmista neuvoista työhön liittyen. Työssä EKF-menetelmän testaamiseen käytetyt MATLAB-koodit ovat Juha Ala-Luhtalan ja Mari Seppäsen toteuttamia ja niiden pohjalta on toteutettu myös GMF-menetelmän testaukseen käytetyt koodit.

Lopuksi haluan kiittää vanhempiani ja muita läheisiäni tuesta ja kannustuksesta opinnoissa. Suuri kiitos kuuluu miehelleni Simolle tuesta opintojen aikana ja neuvoista diplomityöhön liittyen. Viimeisenä vielä kiitos pienelle Eeti-pojallemme, joka on tasapainottanut diplomityön tekemistä tuomalla arkeeni paljon muutakin sisältöä.

Tampere, 4. marraskuuta 2013

Miila Martikainen
Näyttelijäntie 48
33720 Tampere

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Suodatus	3
2.1	Bayesin lause	3
2.2	Bayesiläinen suodatus	4
2.3	Kalmanin suodatin	6
2.4	Laajennettu Kalmanin suodatin	7
3	Gaussin mikstuuri	9
3.1	Gaussin mikstuuri -suodatin	10
3.2	Komponenttien jakaminen	11
3.2.1	Sigmapistemenetelmä	12
3.2.2	Laatikkomenetelmä	14
3.3	Komponenttien vähennys	17
3.3.1	Komponenttien unohdus	18
3.3.2	Komponenttien yhdistäminen	18
3.3.3	Uudelleennäytteistys	18
4	Satelliitit	19
4.1	Rataennustus	20
4.1.1	Voimamalli	20
4.1.2	Gravitaatiokiihtyvyydet	21
4.1.3	Auringon säteilypainne	23
4.1.4	Alkutilan parannus	24
4.1.5	Tilamalli	24
4.2	Koordinaatistoista	25
4.3	Liiketytalo ja sen ratkaisu	27
4.3.1	Yleistä	27
4.3.2	Mittaukset	28
4.3.3	Liiketytalon ratkaisu	29
4.3.4	Rungen ja Kuttan menetelmä	30
5	Kokeelliset tulokset	32
5.1	Satelliitin radan ennustaminen EKF- ja GMF-suodattimilla	32
5.1.1	Sigmapistemenetelmä	33

5.1.2	Parametrien valinta	34
5.2	Saadut tulokset	38
5.2.1	Satelliitin rataennustus	38
5.2.2	Konsistenttius	44
5.2.3	Ennustusvirheen hajonta	45
5.2.4	Havaintoja	49
6	Tilamallin kehittäminen	50
7	Yhteenveto	53
	Lähteet	55
A	Legendren polynomi	58
B	Tilamallin prosessikohina	60

Merkinnät ja lyhenteet

Merkinnät

$\ \cdot\ $	Eukliidinen normi
\propto	Suoraan verrannollinen -symboli
\in	Joukkoonkuulumisoperaattori
f, h	Funktioita
$\int_S f(x)dx$	Funktion f integraali joukon S yli muuttujan x suhteen
A, B	Matriiseja
I	Identiteettimatriisi
\mathbf{x}, \mathbf{y}	Satunnaismuuttujia
$\mathbf{x} = x$	Satunnaismuuttujan realisaatio
$\mathbf{x} (\mathbf{y} = y)$	Ehdollinen satunnaismuuttuja: \mathbf{x} ehdolla $\mathbf{y} = y$
$\mathbf{x} \sim X$	Satunnaismuuttuja \mathbf{x} noudattaa jakaumaa X .
\mathbf{x}, \mathbf{y}	Vektoreita
A^{-1}	Matriisin A kääteismatriisi
A^T	Matriisin A transpoosi
$\mathbb{E}(\mathbf{x})$	Satunnaismuuttujan \mathbf{x} odotusarvo
$\text{tr}(A)$	Matriisin A jälki
$N(\mu, \Sigma)$	Normaalijakauma parametreilla μ ja Σ
$p_{\mathbf{x}}, p(\mathbf{x})$	Satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheysfunktio
$p_N(\cdot; \mu, \Sigma)$	Normaalijakauman tiheysfunktio parametrein μ ja Σ
$p(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1})$	Siirtymäjakauma
$p(\mathbf{x}_k \mathbf{y}_{1:k-1})$	Priorijakauma
$p(\mathbf{x}_k \mathbf{y}_{1:k})$	Posteriorijakauma
$p(\mathbf{y}_k \mathbf{x}_k)$	Uskottavuus
$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$	Tila \mathbf{x} ajanhetkellä t_k
diag	Diagonaalioperaattori, poimii matriisin diagonaalin vektoriksi tai tekee vektorista diagonaalimatriisin

$y_{1:k}$	Mittaukset ensimmäisestä mittauksesta k mittaukseen
A_{k-1}	Tilansiirtomatriisi
\mathbf{q}_{k-1}	Normaalijakautunut prosessikohina
Q_{k-1}	Prosessikohinan kovarianssimatriisi
H_k	Mittausmatriisi
\mathbf{r}_k	Normaalijakautunut mittauskohina
R_k	Mittauskohinan kovarianssimatriisi
$\Sigma_0 > 0$	Positiivisesti definiitti matriisi Σ_0
$M(\alpha_j, \mu_j, \Sigma_j)$	Gaussinen mikstuuri painoilla α_j , odotusarvoilla μ_j ja kovariansseilla Σ_j
$F_x(m_{k-1}), f'(m_{k-1})$	Funktion f derivaatta muuttujan x suhteen pisteessä m_{k-1}
$\mathbf{x}^T \mathbf{y}$	Vektoreiden \mathbf{x} ja \mathbf{y} välinen sisätulo
\mathbf{e}_i	Vektori, jonka i :s komponentti on 1 ja muut ovat 0
\dot{f}	Funktion f aikaderivaatta
\ddot{f}	Funktion f toinen aikaderivaatta
x_p, y_p	Napavariaatioparametrit
a_g	Maan gravitaatiokiihtyvyys
a_{kuu}	Kuun gravitaatiokiihtyvyys
a_{aur}	Auringon gravitaatiokiihtyvyys
a_{asp}	Auringon säteilypaineesta johtuva kiihtyvyys
G	Gravitaatiovakio
M_E	Maan massa
R_E	Maan säde
λ	Pituuspiiri
φ	Leveyspiiri
P_n	Legendren polynomi
P_{nm}	Legendren liittopolynomi
C_{nm}, S_{nm}	Geopotentialikertoimet
∇U	Funktion U gradientti
a_{tk}	Taivaankappaleen aiheuttaman gravitaatiovoiman kiihtyvyys
M	Taivaankappaleen massa
\mathbf{r}_{tk}	Taivaankappaleen paikka maakeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa
\mathbf{r}_M	Kuun paikka maakeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa

r_{\odot}	Auringon paikka maakeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa
\circ	Aste (kulmissa)
$''$	Sekunti (kulmissa)
r	Satelliitin paikka maakeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa
r_{aur}	Satelliitin etäisyys auringosta
e_{aur}	Yksikkövektori satelliitista Aurinkoon
P_0	Auringon säteilyn paine Maan etäisyydellä
A	Satelliitin aurinkopaneelien pinta-ala
AU	Astronominen yksikkö
ε	Heijastuskerroin
α	Säteilypaineparametri
λ	Säteilypaineen varjostusfunktio
m	Satelliitin massa
$ t $	Muuttujan t itseisarvo
R_A^B	Muunnosmatriisi koordinaatistosta A koordinaatistoon B
δ_{nm}	Kroneckerin deltafunktio
$x!$	Muuttujan x kertoma
$\rho(r)$	Maan tiheys
$P(A)$	Todennäköisyys tapahtumalle A
m_{est}	Vektorin m estimaatti
m_{tosi}	Toteutunut vektori m

Lyhenteet

BE	Broadcast-efemeridi (Broadcast Ephemeris)
CIO	Konventionaalinen kansainvälinen origo (Conventional International Origin)
ECEF	Maakeskeinen, Maahan sidottu (Earth Centered Earth Fixed)
EKF	Laajennettu Kalmanin suodatin (Extended Kalman Filter)
EOP	Maan suuntausparametrit (Earth Orientation Parameters) x_p , y_p , dUT1
GM	Gaussin mikstuuri (Gaussian Mixture)
GMF	Gaussin mikstuuruodatin (Gaussian Mixture Filter)
GNSS	Yhteisnimitys satelliittipaikannusjärjestelmille: GPS, GLONASS, Galileo jne. (Global Navigation Satellite System)
GPS	Maailmanlaajuinen satelliittipaikannusjärjestelmä (Global Positioning System)
ICRS	Kansainvälinen tähtitieteellinen koordinaattijärjes- telmä (International Celestial Reference System)
IERS	Kansainvälinen Maan pyörimisen ja koordinaatti- järjestelmien palvelu (International Earth Rotation and Reference System Service)
IGS	Kansainvälinen GNSS-palvelu (International GNSS Service)
ITRS	Kansainvälinen terrestinen järjestelmä (International Terrestrial Reference System)
JD	Juliaaninen päivämäärä (Julian date)
MAP	Posteriorijakauman moodi (Maximum a Posteriori)
NEES-testi	Epäkonsistenttiuden testausmenetelmä (Normalised Estimation Error Squared)
PE	Precise-efemeridi (Precise Ephemeris)
PRN	Näennäissatunnainen numero (Pseudo Random Number)
RK3	Kolmannen kertaluvun Runge ja Kutta menetelmä
SPGM	Gaussin mikstuurin komponenttien jako sigma- pistemenetelmällä (Sigma Point Gaussian Mixture)
TTF	Aika ensimmäiseen paikannustulokseen (Time To First Fix)

UT1	Yleisaika (Universal Time)
UTC	Koordinoitu yleisaika (Coordinated Universal Time)
YE	Yleinen epäkonsistenttiustesti (General Inconsistency Test)

Luku 1

Johdanto

GPS-satelliitin (Global Positioning System) rataa voidaan ennustaa muodostamalla satelliitille liikeyhtälö, joka ratkaistaan numeerisesti käyttäen alkuarvoina GPS-satelliittien oikeita paikka- ja nopeustietoja. Satelliitin liikeyhtälössä huomioidaan tärkeimmät satelliittiin vaikuttavat voimat, jotka ovat Maan, Kuun ja Auringon aiheuttavat vetovoimat sekä Auringon säteilypain.

Satelliitin radan ennustamista on tutkittu aiemmin [8, 9, 16, 18, 23]. Motivaationa aiemmissa tutkimuksissa on ollut nopeuttaa GPS-paikannuslaitteen ensimmäisen paikkatiedon saamiseen kuluva aikaa, TTFF (time to first fix) siinä tilanteessa, että verkkoyhteyttä ei ole saatavilla tai se on maksullinen eikä sitä haluta käyttää. Kun GPS-paikannuslaite käynnistetään sen oltua pois päältä, kestää parhaimmillaankin noin 30 sekuntia siihen, että laite saa ensimmäiset satelliitin lähettämät ratatiedot, joiden avulla voidaan ratkaista käyttäjän paikka. Mikäli radat ovat valmiiksi ennustettuna laitteella, laitteen käyttäjän paikka saadaan ratkaistua hyvässä tapauksessa vain noin viidessä sekunnissa [23].

Satelliitin rataa on aiemmin estimoitu ennustamalla tilan muuttumista laajennetulla Kalmanin suodattimella (EKF) [3]. Koska satelliitin ennustuksessa liikemalli eli tilan dynamiikka on epälineaarinen, lopputila ei välttämättä ole Gaussinen vaikka alkutila, priori, sitä olisikin. Kun liikemalli linearisoidaan, saadaan lopputila, joka on Gaussinen approksimaatio.

Laajennettu Kalmanin suodatin antaa lopputilaksi aina Gaussisen jakauman, joka ei välttämättä kuvaa lopputilaa hyvin. Gaussin mikstuuri -suodatin (Gaussian Mixture Filter, GMF) jakaa Gaussisen alkutilan Gaussisiin komponentteihin, jotka sitten yksittäin ennustetaan käyttäen laajennettua Kalmanin suodatinta. Näiden komponenttien gaussisuus saattaa säilyä paremmin muunnoksen aikana ja Gaussin mikstuuri -suodatinta käytettäessä lopputila on Gaussin mikstuuri. Koska liikemalli on epälineaarinen, yksittäinen Gaussinen jakauma ei välttämättä kuvaa hyvin lopputilaa, mutta kun Gaussinen jakauma jaetaan useampaan komponenttiin voi lopputilan jakauma, joka on Gaussin mikstuuri, kuvata lopputilaa paremmin.

Gaussin mikstuuri -suodattimella pyritään parantamaan rataennustuksen tarkkuutta ja arvioimaan paremmin ennustusvirheen suuruutta. Lisäksi työn tarkoituksena on tutkia kuinka epälineaarinen tilamalli on eli kuinka ei-Gaussinen lopputilan jakauma on.

Työn rakenne on seuraava: Luvussa 2 esitetään yleisiä tietoja Bayesiläisestä suodattuksesta, luvussa 3 esitetään Gaussin mikstuuri -jakauma ja -suodatin sekä erilaisia tapoja jakaa ja vähentää Gaussin mikstuurin komponentteja. Luvussa 4 käsitellään satelliitin rataennustukseen tarvittavaan liikeyhtälöön liittyviä voimia, koordinaattistoja ja liikeyhtälön numeerista ratkaisemista. Luvussa 5 esitetään testauksessa saadut tulokset. Uusimpia tutkimustuloksia tämän työn aiheen saralta esitetään luvussa 6. Lopuksi luvussa 7 kootaan yhteen työssä esitetyt menetelmät ja tulokset sekä pohditaan tutkimuksen tulevaisuutta.

Luku 2

Suodatus

2.1 Bayesin lause

Useissa teknisissä sovelluksissa, esimerkiksi paikannuksessa, prosessin tilalle \mathbf{x} halutaan mahdollisimman hyvä estimaatti mittauksia \mathbf{y} apuna käyttäen. Usein halutaan tietää myös kuinka tarkka tilan estimaatti on. Jotta estimaatti ja sen tarkkuus voitaisiin määrittää, tarvitaan prosessin malli, joka kuvaa sitä miten prosessi muuttuu ajan kuluessa sekä mittausmalli ja prior. Tämän lisäksi saatavilla voi olla mittauksia eri ajan hetkiltä. Tilan *priori* $p(\mathbf{x})$ kuvaa tilaa ennen kuin yhtään mittausta on saatu, $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ on mittausten *uskottavuus* ja $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ on *posteriorijakauma*.

Määritelmä 2.1 (Ehdollinen tiheysfunktio). *Olkoon \mathbf{x} ja \mathbf{y} satunnaismuuttujia. Silloin satunnaismuuttujan \mathbf{x} ehdolla $\mathbf{y} = \mathbf{y}$ tiheysfunktio määritetään yhtälöllä*

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})}, \quad (2.1)$$

kun $p(\mathbf{y}) > 0$.

Tämä yhtälö kuvaa siis tilaa \mathbf{x} sillä ehdolla, että mittaukset $\mathbf{y} = \mathbf{y}$ ovat realisoituneet. Bayesin lauseessa tilavektoria \mathbf{x} estimoidaan päivittämällä sen priorijakaumaa saatujen mittausten \mathbf{y} perusteella. Posteriorijakaumaksi saadaan, sillä ehdolla, että on saatu mittaukset \mathbf{y} :

Lause 2.1 (Bayesin lause). *Satunnaismuuttujan \mathbf{x} oletetaan olevan n -ulotteinen. Silloin posteriorijakauma on*

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}),$$

missä normalisointivakio

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

[20]

2.2 Bayesiläinen suodatus

Bayesiläisessä suodatuksessa halutaan arvioida systeemin tilan \mathbf{x}_k todennäköisyysjakaumaa ajanhetkellä t_k , kun mittauksia on saatu ajanhetkelle t_k asti. Tällöin posteriorijakaumaa merkitään $p(\mathbf{x}_k|(\mathbf{y}_{1:k} = \mathbf{y}_{1:k}))$. Käytetään merkintää $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ eli \mathbf{x}_k on tila hetkellä t_k . Siirtymäjakauma $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ on liikemalli ja mittauksen uskottavuusfunktio $p(y_k|\mathbf{x}_k)$ on mittausmalli.

Bayesiläisessä suodatuksessa oletetaan Markovin malli, jolloin sille pätee seuraavat kaksi ominaisuutta [21, s. 50-51]:

Määritelmä 2.2 (Tilojen Markov-ominaisuus). *Tila \mathbf{x}_k ehdolla $\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_{k-1}$ on riippumaton kaikesta, jota prosessissa on tapahtunut aiemmin:*

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{1:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}).$$

Myös vastaavasti tilahistoria on riippumaton tulevasta:

$$p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_{k:T}, \mathbf{y}_{k:T}) = p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_k).$$

Määritelmä 2.3 (Mittausten ehdollinen riippumattomuus). *Mittaus \mathbf{y}_k ehdolla $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k$ on ehdollisesti riippumaton mittaus- sekä tilahistoriasta eli*

$$p(y_k|\mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(y_k|\mathbf{x}_k).$$

Lauseessa 2.2 on esitetty Bayesiläinen suodatin posteriorijakauman ratkaisemiseksi.

Lause 2.2 (Bayesiläinen suodatin). *Oletetaan Markovin malli ja että liike- ja mittausmalli tunnetaan. Oletetaan, että tiheysfunktio $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})$ tiedetään, jolloin toteutuneella mittauksella $\mathbf{y}_k = y_k$ saadaan posteriorijakauma $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ laskettua seuraavasti:*

1. Ennustusaskel

Kun liikemalli tiedetään, tilan \mathbf{x}_k ennustejakauma ajanhetkellä t_k voidaan laskea Chapmanin ja Kolmogorovin yhtälöllä

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1}.$$

2. Päivitysaskel

Kun saadaan mittaus \mathbf{y}_k ajanhetkellä t_k , voidaan tilan \mathbf{x}_k posteriorijakauma laskea Bayesin kaavalla

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(y_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})}{\int p(y_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k}.$$

[21, s. 53]

Mikäli tilan liikemalli sekä mittausmalli ovat lineaarisia ja normaalijakautuneita, saadaan tehtävälle suljetun muodon ratkaisu: Kalmanin suodatin (Kalman filter, KF), jota käsitellään seuraavassa kappaleessa. Liike- ja mittausmalli ovat lineaarisia, mikäli ne voidaan kirjoittaa kaavojen (2.2) ja (2.3) muotoon. [21, s. 55]

2.3 Kalmanin suodatin

Oletetaan, että liike- ja mittaussmallit ovat lineaarisia Gaussisia

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k, \quad (2.3)$$

missä $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ on tila, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ on mitta, $\mathbf{q}_{k-1} \sim N(0, \mathbf{Q}_{k-1})$ on prosessikohina ja matriisi \mathbf{Q}_{k-1} on symmetrinen ja positiivisesti definiitti¹, $\mathbf{r}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ on mittauskohina, \mathbf{R}_k on symmetrinen ja ei-singulaarinen ja priori on normaalijakauma $\mathbf{x}_0 \sim N(\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0)$. Oletetaan, että priori \mathbf{x}_0 , prosessikohina \mathbf{q}_{k-1} ja mittauskohina \mathbf{r}_k ovat riippumattomia. Matriisi \mathbf{A}_{k-1} on tilansiirtomatriisi, \mathbf{H}_k on mittaussmallin matriisi. [19, 20][21, s. 55]

Toisin sanoen malli on

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_0) &= p_N(\mathbf{x}_0; \mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0) \\ p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) &= p_N(\mathbf{x}_k; \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}) \\ p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) &= p_N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k). \end{aligned}$$

Silloin Bayesiläisen suodattimen ratkaisujakaumat ovat Gaussisia:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) &= p_N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \\ p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &= p_N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \\ p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) &= p_N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}_k\mathbf{m}_k^-, \mathbf{S}_k), \end{aligned}$$

missä $\mathbf{y}_{1:k-1}$ tarkoittaa mittauksia ensimmäisestä mittauksesta $k-1$ mittaukseen.

Yllä olevien jakaumien parametrit voidaan laskea algoritmilla 1, joka sisältää Kalmanin suodattimen ennustus- ja päivitysaskeleet.

Todistus on esitetty lähteessä [21, s. 56-57].

¹Matriisi \mathbf{C} on positiivisesti definiitti mikäli sille pätee

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

Algoritmi 1 Kalmanin suodatin

Ennustusaskel:

$$\mathbf{m}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{m}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Päivitysaskel:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{m}_k^-)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T$$

2.4 Laajennettu Kalmanin suodatin

Laajennettu Kalmanin suodatin (Extended Kalman filter, EKF) on Kalmanin suodattimen laajennus epälineaarisiin suodatusongelmiin. EKF approksimoi mittaus- ja liikemallit linearisoimalla ja näin lopputulos on Gaussinen approksimaatio.

Jos prosessi- ja mittauskohinat voidaan olettaa additiivisiksi, epälineaarinen tilamalli voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k,$$

missä $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ on tila, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ on mittaus, $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_{k-1})$ on Gaussinen prosessikohina, $\mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$ on Gaussinen mittauskohina, funktio $\mathbf{f}_k(\cdot)$ on liikefunktio ja $\mathbf{h}_k(\cdot)$ mittausfunktio [21, s. 68].

Linearisoinnista johtuen EKF:n ratkaisujakauma on Gaussinen

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \approx p_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k).$$

Tuloksena on seuraava algoritmi:

Algoritmi 2 Laajennettu Kalmanin suodatin

Ennustusaskel:

$$\mathbf{m}_k^- = \mathbf{f}_k(\mathbf{m}_{k-1})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_x(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_x^T(\mathbf{m}_{k-1}) + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Päivitysaskel:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_x(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_x^T(\mathbf{m}_k^-) + \mathbf{R}_k$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_x^T(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{m}_k^-))$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T$$

missä $\mathbf{F}_x(\mathbf{m}_{k-1}) = \mathbf{f}'_k(\mathbf{m}_{k-1})$ ja $\mathbf{H}_x(\mathbf{m}_k^-) = \mathbf{h}'_k(\mathbf{m}_k^-)$.

Johto on esitetty lähteessä [21, s. 69-70].

Luku 3

Gaussin mikstuuri

Gaussin mikstuuri (Gaussian Mixture, GM) on jakauma, joka on konvekssi kombinaatio useammasta Gaussisesti jakautuneesta komponentista. Komponentteja painotetaan kutakin omalla painollaan, joiden pitää kaavan (3.2) mukaisesti summautua yhdeksi. Gaussin mikstuurilla saadaan esitettyä monimutkaisempikin tiheysfunktio, toisin kuin yhdellä Gaussisella jakaumalla. Yleisessä tapauksessa Gaussin mikstuurikin on kuitenkin approksimaatio tiheysfunktioista $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.

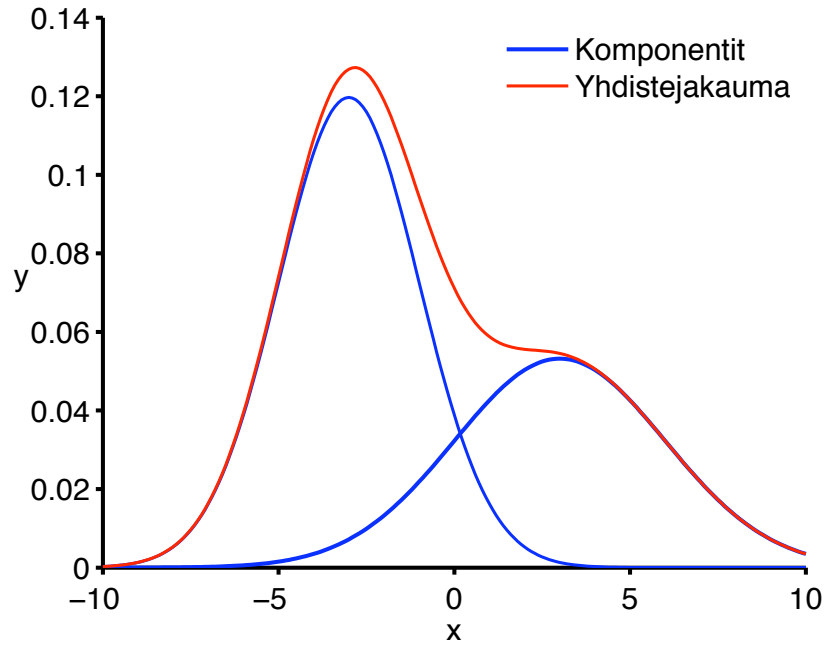
Määritelmä 3.1. *Satunnaismuuttujan \mathbf{x} jakauma on Gaussin mikstuuri mikäli sen tiheysfunktio voidaan esittää muodossa*

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i p_N(\mathbf{x}; \mu_i, \Sigma_i). \quad (3.1)$$

Kaavassa (3.1) esitettyjen painojen $\alpha_{1:p}$ on oltava ei-negatiivisia ja niiden pitää täyttää ehto

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1. \quad (3.2)$$

Kuvassa 3.1 on esimerkki Gaussin mikstuurstusta. Kuvassa komponentit on esitetty sinisellä ja yhdistejakauma punaisella. Yhdistejakauma toteuttaa kaavan (3.1) ja esimerkissä käytetyt arvot ovat $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,4$, $\mu_1 = -3$, $\mu_2 = 3$, $\Sigma_1 = 2$ ja $\Sigma_2 = 3$.



Kuva 3.1: Esimerkki kaksikomponenttisesta Gaussin mikstuurstusta.

Kuvasta nähdään, että komponentit ovat itsenäisinä Gaussisia jakaumia, mutta yhdistejakauma ei ole enää yksihiippuinen Gaussinen jakauma, vaan Gaussin mikstuuri.

3.1 Gaussin mikstuuri -suodatin

Tässä kappaleessa esitetään Gaussin mikstuuri -suodatin. Gaussin mikstuuri -suodattimessa priorin on kaavan (3.3) mukainen ja jokaiselle komponentille kovarianssimatriisi Σ on symmetrinen ja positiivisesti definitti eli silloin myös kääntyvä. Oletetaan sekä priorin että uskottavuuden eli mittausmallin olevan Gaussin mikstuureja. Liikemalli on kaavan (2.2) mukainen.

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i p_N(\mathbf{x}; \mu_i, \Sigma_i), \quad (3.3)$$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \beta_j p_N(\mathbf{y}; \mathbf{H}_j \mathbf{x}, \mathbf{R}_j).$$

Tällöin posteriorijakauma on Gaussin mikstuuri, jonka tiheysfunktio on [6]

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_j p_N(\mathbf{y}; \mathbf{H}_j \mu_i, \mathbf{S}_{i,j}) p_N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}_{i,j}, \hat{\mathbf{P}}_{i,j})}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p \alpha_i \beta_j p_N(\mathbf{y}; \mathbf{H}_j \mu_i, \mathbf{S}_{i,j})},$$

missä

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{i,j} &= \mathbf{H}_j \Sigma_i \mathbf{H}_j^T + \mathbf{R}_j, \\ \mathbf{K}_{i,j} &= \Sigma_i \mathbf{H}_j^T \mathbf{S}_{i,j}^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{i,j} &= \mu_i + \mathbf{K}_{i,j} (\mathbf{y} - \mathbf{H}_j \mu_i) \quad \text{ja} \\ \hat{\mathbf{P}}_{i,j} &= \Sigma_i - \mathbf{K}_{i,j} \mathbf{H}_j \Sigma_i. \end{aligned}$$

Seuraavassa on esitetty Gaussin mikstuuri -suodatin algoritmimuodossa.

Algoritmi 3 Gaussin mikstuuri -suodatin

```

for  $i = 1 \dots p$  do
  Ennustusaskel:
   $\mu_{k,i}^- = \mathbf{A}_{k-1} \mu_{k-1,i}$ 
   $\Sigma_{k,i}^- = \mathbf{A}_{k-1} \Sigma_{k-1,i} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$ 
   $\alpha_{k,i} = \alpha_{k,i}$ 
  Mahdollinen uusiin komponentteihin jakaminen

  Päivitysaskel:
  for  $j = 1 \dots m$  do
     $\mathbf{S}_{k,i,j} = \mathbf{H}_{k,j} \Sigma_{k,i}^- \mathbf{H}_{k,j}^T + \mathbf{R}_{k,j}$ 
     $\mathbf{K}_{k,i,j} = \Sigma_{k,i}^- \mathbf{H}_{k,j}^T \mathbf{S}_{k,i,j}^{-1}$ 
     $\hat{\mathbf{x}}_{k,i,j} = \mu_{k,i}^- + \mathbf{K}_{k,i,j} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_{k,j} \mu_{k,i}^-)$ 
     $\hat{\mathbf{P}}_{k,i,j} = \Sigma_{k,i}^- - \mathbf{K}_{k,i,j} \mathbf{H}_{k,j} \Sigma_{k,i}^-$ 
     $\alpha_{k,i,j} = \alpha_{k,i}^- \beta_j p_N(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}_{k,j} \mu_{k,i}^-, \mathbf{S}_{k,i,j})$ 
  end for
end for
 $\alpha_{k,i,j} = \frac{\alpha_{k,i,j}}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \alpha_{k,i,j}}$ 
  Mahdollinen komponenttien vähentäminen

```

3.2 Komponenttien jakaminen

EKF approksimoi mittaus- ja liikemallit linearisoimalla ne, mutta näin saatu lineaarinen approksimaatio on hyvä vain tietyssä ympäristössä, lähellä linearisointialuetta. Gaussin mikstuurin jakamisella komponentteihin pyritään pienentämään tätä linea-

risointivirhettä lisäämällä linearisointialueiden määrää. Priorin jakamiseen Gaussin mikstuurin komponentteihin on käytössä useita eri menetelmiä, seuraavissa kappaleissa niistä esitetään kaksi.

3.2.1 Sigmapistemenetelmä

Seuraavassa on esitetty priorin jakaminen Gaussin mikstuurin komponentteihin sigmapistemenetelmällä (Sigma Point Gaussian Mixture, SPGM). Oletetaan prioritilan olevan n -dimensioinen ja tilan olevan normaalijakautunut odotusarvona μ_0 ja kovarianssina Σ_0 :

$$\mathbf{x} \sim N(\mu_0, \Sigma_0).$$

Prioritilaa arvioidaan nyt Gaussin mikstuurina kaavan (3.1) mukaisesti, siten että kovarianssimatriisit Σ_i ovat pienempiä kuin priorin kovarianssimatriisi Σ_0 . Määritelmän mukaan matriisi A on pienempi kuin matriisi B, mikäli matriisi $B - A$ on positiivisesti definiitti matriisi.

Sigmapistemenetelmässä Gaussin mikstuurin komponenttien jakaminen perustuu sigmapisteisiin. Sigmapistemenetelmässä muodostetaan $2n + 1$ mikstuurin komponenttia, joiden jokaisen kovarianssimatriisi on

$$\Sigma_i = (1 - \tau^2)\Sigma_0.$$

Parametrille τ on rajoitus $\tau \in (0, 1)$. Painot α_i sekä odotusarvot μ_i saavat seuraavat arvot [7]:

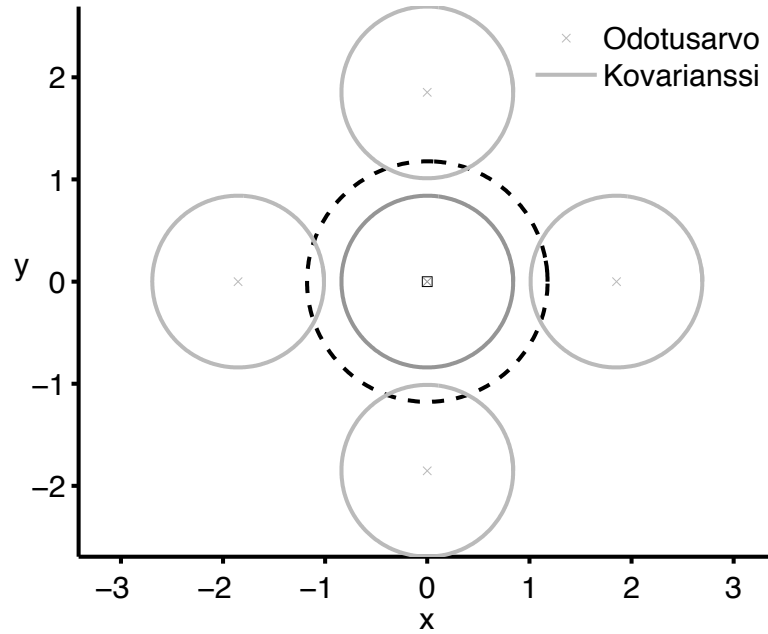
Taulukko 3.1: Gaussin mikstuuriapproksimaation painot ja odotusarvot sigmapistemenetelmällä.

indeksi	α_i	μ_i
0	$\frac{\kappa}{\kappa+n}$	μ_0
1, ..., n	$\frac{1}{2(\kappa+n)}$	$\mu_0 + \tau\sqrt{\kappa+n}\sqrt{\Sigma_0}\mathbf{e}_i$
n + 1, ..., 2n	$\frac{1}{2(\kappa+n)}$	$\mu_0 - \tau\sqrt{\kappa+n}\sqrt{\Sigma_0}\mathbf{e}_{i-n}$

Taulukossa 3.1 esiintyvä vektori \mathbf{e}_i on i :s Karteesinen kantavektori eli vektori, jonka i :s komponentti on 1 ja muut 0. Parametrin κ tulee olla positiivinen. Odotusarvojen μ_i laskemiseen tarvitaan kovarianssimatriisin Σ_0 neliöjuurta. Matriisi B on matriisin Σ_0 neliöjuuri mikäli $\Sigma_0 = \mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$. Oletetaan tässä työssä, että matriisin Σ_0 neliöjuuri B on symmetrinen ja positiivisesti definiitti, jolloin se on yksikäsitteinen. [11]

Kuvassa 3.2 on esimerkki kaksiulotteisesta tilanteesta, jossa alkuperäinen yksi-komponenttinen jakauma (piirretty katkoviivalla) on jaettu sigmapistemenetelmällä

viiteen komponenttiin. Kuvassa kunkin komponentin painoa kuvataan komponentin harmaalla värillä siten, että mitä tummempi komponentti on, sitä suurempi paino sillä on. Alkuperäisen jakauman odotusarvo on $\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja kovarianssi $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Komponentteja jaettaessa parametrien κ ja τ arvoina on käytetty $\kappa = 5$ ja $\tau = 0,7$. Ellipsit ovat 50 %:n ellipsejä, mikä tarkoittaa sitä, että 50 % todennäköisyysmas-
sasta on ellipsin sisällä.



Kuva 3.2: Kaksiulotteinen esimerkki Gaussin mikstuurin komponenttien jaosta sigmapistemenetelmällä. Komponentteja on esimerkkitapauksessa viisi. Alkuperäisen jakauman odotusarvo on merkitty kuvassa mustalla neliöllä ja kovarianssi mustalla katkoviivalla.

Seuraavassa on osoitettu, että sigmapistemenetelmällä saadun approksimaation odotusarvo ja kovarianssimatriisi ovat samat kuin alkuperäisen jakauman.

Odotusarvo approksimaatiolle on [7]

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{app}} &= \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j \mu_j \\
 &= \frac{\kappa}{\kappa + n} \mu_0 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2(\kappa + n)} (\mu_0 + \tau \sqrt{\kappa + n} \sqrt{\Sigma_0} \mathbf{e}_j) \\
 &\quad + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{2(\kappa + n)} (\mu_0 - \tau \sqrt{\kappa + n} \sqrt{\Sigma_0} \mathbf{e}_{j-n}) \\
 &= \mu_0 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2(\kappa + n)} \tau \sqrt{\kappa + n} \sqrt{\Sigma_0} \mathbf{e}_j - \sum_{l=1}^n \frac{1}{2(\kappa + n)} \tau \sqrt{\kappa + n} \sqrt{\Sigma_0} \mathbf{e}_l \\
 &= \mu_0
 \end{aligned}$$

eli sama kuin alkuperäisen jakauman odotusarvo. Vastaavasti kovarianssimatriisi on [7]

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{app}} &= \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j (\Sigma_j + (\mu_j - \mu_{\text{app}})(\mu_j - \mu_{\text{app}})^T) \\
 &= (1 - \tau^2) \Sigma_0 + \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j (\mu_j - \mu_0)(\mu_j - \mu_0)^T \\
 &= (1 - \tau^2) \Sigma_0 + \tau^2 \sum_{j=1}^n (\sqrt{\Sigma_0} \mathbf{e}_j)(\sqrt{\Sigma_0} \mathbf{e}_j)^T \\
 &= (1 - \tau^2) \Sigma_0 + \tau^2 \sum_{j=1}^n \sqrt{\Sigma_0} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \sqrt{\Sigma_0}^T \\
 &= \Sigma_0.
 \end{aligned}$$

3.2.2 Laatikkomenetelmä

Toinen tapa Gaussin mikstuurin komponenttien jakamiseen on laatikkomenetelmä (Box GM approximation, BGMA). Laatikkomenetelmän ajatuksena on jakaa tila-avaruus osiin käyttäen yhdensuuntaisia tasoja ja approksimoida näitä osia kutakin yhdellä Gaussin mikstuurin komponentilla. Approksimaatio n -ulotteiselle jakaumalle, jonka tiheysfunktio on $p_{\mathbf{x}}(\xi)$, on taulukon 3.2 mukainen.

Taulukko 3.2: *Gaussin mikstuuriapproksimaation painot, odotusarvot ja kovarianssit laatikkomenetelmällä*

α_j	μ_j	Σ_j
$\int_{A_j} p_x(\xi) d\xi$	$\int_{A_j} \xi \frac{p_x(\xi)}{\alpha_j} d\xi$	$\int_{A_j} (\xi - \mu_j)(\xi - \mu_j)^T \frac{p_x(\xi)}{\alpha_j} d\xi$

Approksimaatio Gaussiselle priorille $x \sim N_n(\mu_0, \Sigma_0)$, missä $\Sigma_0 > 0$ eli positiivisesti definiitti, on

$$x_N \sim M(\alpha_j, \mu_j, \Sigma_j)_{(j, (2N^2+1)^d)},$$

missä indeksi $j \in \mathbb{Z}^d$, $d \leq n$ ja $\|i\|_\infty \leq N^2$ ja laatikoiden lukumäärä on $(2N^2 + 1)^d$. Merkinnöissä x_N on Gaussin mikstuuriapproksimaatio ja $M(\alpha_j, \mu_j, \Sigma_j)$ on Gaussinen mikstuuri painoilla α_j , odotusarvoilla μ_j ja kovariansseilla Σ_j .

Parametrit ovat

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \int_{A_j} p_x(\xi) d\xi = \prod_{i=1}^d (\Phi(u_i(j)) - \Phi(l_i(j))), \\ \mu_j &= \int_{A_j} \xi \frac{p_x(\xi)}{\alpha_j} d\xi = \mu_0 + \Sigma_0 A^T \epsilon_j, \\ \Sigma_j &= \int_{A_j} (\xi - \mu_j)(\xi - \mu_j)^T \frac{p_x(\xi)}{\alpha_j} d\xi \\ &= \Sigma_0 - \Sigma_0 A^T \Lambda_j A \Sigma_0, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x p_N(\xi; 0, 1) d\xi, \\ \Lambda_j &= \text{diag}(\delta_j + \text{diag}(\epsilon_j \epsilon_j^T)), \\ \epsilon_j &= \sum_{i=1}^d e_i \frac{e^{-\frac{1}{2}l_i(j)^2} - e^{-\frac{1}{2}u_i(j)^2}}{\sqrt{2\pi}(\Phi(u_i(j)) - \Phi(l_i(j)))}, \\ \delta_j &= \sum_{i=1}^d e_i \frac{u_i(j)e^{-\frac{1}{2}u_i(j)^2} - l_i(j)e^{-\frac{1}{2}l_i(j)^2}}{\sqrt{2\pi}(\Phi(u_i(j)) - \Phi(l_i(j)))}. \end{aligned}$$

Vektori $e_i \in \mathbb{R}^d$ on identiteettimatriisin I i:s sarake. Joukot A_j ovat seuraavia

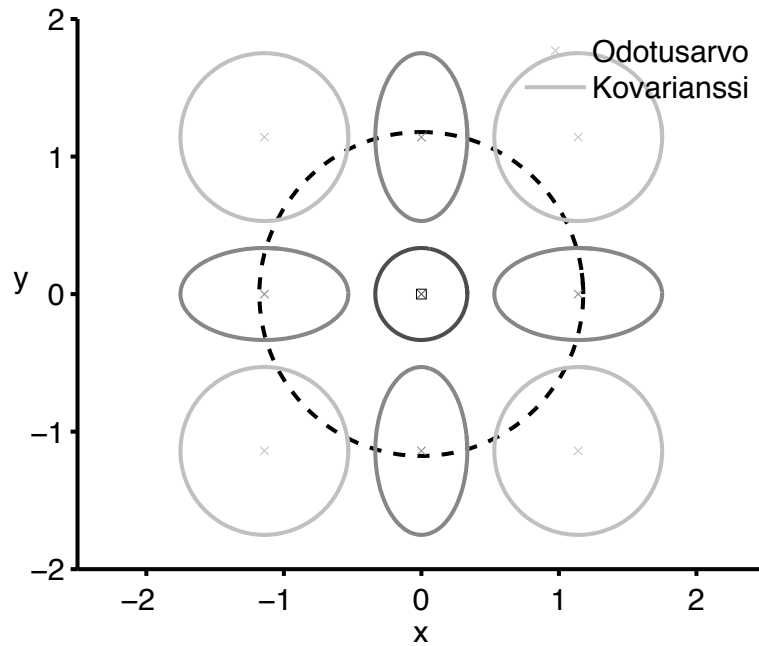
$$A_j = \{x | l(j) < A(x - \mu) \leq u(j)\}.$$

Oletetaan, että $A\Sigma_0A^T = I$. Rajat $l(j)$ ja $u(j)$ ovat

$$l_i(j) = \begin{cases} -\infty, & \text{jos } j_i = -N^2 \\ \frac{j_i}{N} - \frac{1}{2N}, & \text{muulloin} \end{cases}$$

$$u_i(j) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } j_i = N^2 \\ \frac{j_i}{N} + \frac{1}{2N}, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kuvassa 3.3 on esimerkki komponenttien jaosta laatikkomenetelmällä. Esimerkissä on käytetty samaa alkuperäistä jakaumaa kuin sigmapistemenetelmän esimerkissä, joka on esitetty kuvassa 3.2. Tässä kuvassa vastaavasti ellipsit ovat 50 %:n ellipsejä ja kunkin komponentin painoa kuvaa ellipsin väri. Matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, muuttuja $d = 2$ ja muuttuja $N = 1$, jolloin komponentteja on yhdeksän.



Kuva 3.3: Kaksiulotteinen esimerkki Gaussin mikstuurin komponenttien jaosta laatikkomenetelmällä. Komponentteja on esimerkkitapauksessa yhdeksän. Alkuperäisen jakauman odotusarvo on merkitty kuvassa mustalla neliöllä ja kovarianssi mustalla katkoviivalla.

BGMA:n odotusarvo ja kovarianssi ovat samat kuin alkuperäisen jakauman:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{app}} &= \sum_j \alpha_j \mu_j = \sum_j \alpha_j \int_{A_j} \xi \frac{p_x(\xi)}{\alpha_j} d\xi \\ &= \sum_j \int_{A_j} \xi p_x(\xi) d\xi = \int \xi p_x(\xi) d\xi = \mu_0\end{aligned}$$

ja kovarianssi

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{app}} &\stackrel{[4]}{=} \sum_j \alpha_j (\Sigma_j + (\mu_j - \mu_0)(\mu_j - \mu_0)^T) \\ &= \sum_j \alpha_j (\Sigma_j + \mu_j(\mu_j - \mu_0)^T) \\ &= \sum_j \alpha_j \left(\int_{A_j} \xi(\xi - \mu_j)^T \frac{p_x(\xi)}{\alpha_j} d\xi + \mu_j(\mu_j - \mu_0)^T \right) \\ &= \sum_j \alpha_j \int_{A_j} \xi \xi^T \frac{p_x(\xi)}{\alpha_j} d\xi - \mu_0 \mu_0^T \\ &= \int \xi \xi^T p_x(\xi) d\xi - \mu_0 \mu_0^T \\ &= \Sigma_0.\end{aligned}$$

Tällöin siis laatikkomenetelmällä saadun approksimaation odotusarvo ja kovarianssimatriisi ovat samat kuin alkuperäisen Gaussisen jakauman. [4, 5]

3.3 Komponenttien vähennys

Gaussin mikstuuri -suodatin on laskennallisesti raskas, koska mikäli priorijakauma on p -komponenttinen Gaussin mikstuuri ja mittausvirhejakauma on m -komponenttinen Gaussin mikstuuri, on posteriorijakauma $p \cdot m$ -komponenttinen Gaussin mikstuuri.

Kaikkia mikstuurin komponentteja ei haluta pitää mukana suodattimessa mikäli ne eivät ole merkittäviä Gaussin mikstuuria määritettäessä. Tällöin komponenttien lukumäärää halutaan vähentää. Erilaisia tapoja vähentää komponenttien määrää on esimerkiksi komponenttien unohtaminen, komponenttien yhdistäminen ja uudelleennäytteistys. [6]

Kun komponentteja vähennetään, approksimoidaan alkuperäistä Gaussin mikstuuria silloin toisella Gaussin mikstuurilla, jossa on vain vähemmän komponentteja.

3.3.1 Komponenttien unohdus

Komponentit, joiden paino on alle valitun kynnysarvon, esimerkiksi tässä työssä 10^{-8} , unohdetaan eli niiden painoksi asetetaan 0. Tämän jälkeen jäljelle jääneiden komponenttien painot normalisoidaan. Kynnysarvo on yleensä muuttuva, sillä mikäli komponentteja on todella paljon, ovat niiden painotkin pienemmät. Tässä työssä komponentteja on kuitenkin enimmilläänkin vain 17, jolloin voidaan käyttää kynnysarvona vakiota.

3.3.2 Komponenttien yhdistäminen

Kaksi komponenttia yhdistetään, mikäli komponenttien etäisyys toisistaan on pienempi kuin valittu kynnysarvo. Komponenttien etäisyys toisistaan on esimerkiksi

$$d_{i,j} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} (\mu_i - \mu_j)^T (\Sigma_i + \Sigma_j)^{-1} (\mu_i - \mu_j).$$

Komponentit yhdistetään siten, että säilytetään Gaussin mikstuurin kokonaisuuden odotusarvo ja kovarianssi. Lisätietoa komponenttien yhdistämisestä löytyy lähteestä [5].

3.3.3 Uudelleennäytteistys

Jos sekä komponenttien unohduksen, että yhdistämisen jälkeen Gaussin mikstuurissa on liikaa komponentteja, voidaan käyttää uudelleennäytteistystä. Uudelleennäytteistysalgoritmi määrää satunnaisesti mitkä komponentit säilytetään, minkä jälkeen näiden komponenttien painot normalisoidaan. [6]

Luku 4

Satelliitit

Seuraavassa esitetään satelliitin radan ennustusmenetelmä, jota voi käyttää ilman verkkoyhteyttä GPS-navigointilaitteessa. Satelliitin rataa ja kellovirhettä halutaan ennustaa, jotta käynnistettäessä paikannuslaite, TTFF olisi nopea. Jos satelliitin paikka \mathbf{r} ja kellopoikkeama δt tiedetään laitetta käynnistettäessä, voidaan pseudoetäisyys ρ laskea kaavalla

$$\rho = \|\mathbf{u} - \mathbf{r}\| + c(t_u - \delta t) + \varepsilon$$

lukemalla navigaatioviestistä vain satelliitin kellonaika. Tämä tieto saadaan satelliitilta nopeasti, sillä kellotieto lähetetään GPS-satelliitin tapauksessa joka kuudes sekunti.

Satelliitin rataennustus perustuu siihen, että rataa ennustetaan aiempien vastaanotettujen broadcast-efemeridien (BE) avulla. Algoritmi jakautuu kahteen vaiheeseen: sovitus- ja ennustusvaiheeseen. Sovitusvaiheessa käytetään efemeridin paikkoja ja nopeuksia muutamilta ajanhetkiltä parantamaan epätarkkojen broadcastin nopeuksien sovitusta ja ratkaisemaan tuntemattomat napavariaatioparametrit, EOP (Earth Orientation Parameters), x_p ja y_p ennustusvaihetta varten.

Ennustusvaiheessa satelliitin rataa ennustetaan eteenpäin ajassa. Ennustusta voidaan tehdä lyhyissä pätkissä ja ennustetut paikat ja nopeudet tallentaa muutamilta ajanhetkiltä. Satelliitin tila tietyllä ajanhetkellä voidaan tarvittaessa ratkaista interpoloimalla tallennettujen tietojen välillä.

Ennustusvaiheessa satelliitin liikeyhtälö ratkaistaan. Liikeyhtälöön on sisällytetty Maan vetovoima, Auringon ja Kuun vetovoima ja Auringon säteilypaine. Gravitaatiomallit ja niihin liittyvät parametrit ovat tarkkoja ja ne pysyvät voimassa pitkän aikaa. Myös Auringon ja Kuun koordinaattien laskukaavat ovat voimassa muutamia vuosikymmeniä vuoden 2000 ympäristössä [17, s. 70-72]. Siten myös Auringolle ja Kuulle gravitaatiomallit ovat samat koko laitteen käyttöajan ajan. Auringon säteilypaineeseen vaikuttaa kuitenkin muutamat satelliittikohtaiset parametrit, jotka muuttuvat, kun satelliitti PRN-luvun takana muuttuu. Samoin myös vakiot saatavat muuttua hieman ajan myötä. [25]

4.1 Rataennustus

4.1.1 Voimamalli

Satelliitin rataennustusalgoritmi perustuu satelliitin liikeyhtälöön

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r}), \quad (4.1)$$

missä $\ddot{\mathbf{r}}$ on satelliitin paikkavektorin toinen aikaderivaatta, \mathbf{a} on vektoriarvoinen funktio, joka antaa satelliitin kiihtyvyyksvektorin ajan ja satelliitin paikan funktiona. Jos tiedossa on satelliitin paikka ja nopeus hetkellä t_0 , $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ ja $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$, voidaan satelliitin paikka ratkaista millä tahansa muulla ajanhetkellä t integroimalla yhtälö (4.1) kahdesti ajan suhteen.

Voimamallissa on huomioitu satelliittiin eniten vaikuttavat voimat, jolloin kiihtyvyys voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_{kuu} + \mathbf{a}_{aur} + \mathbf{a}_{asp}, \quad (4.2)$$

missä \mathbf{a}_g , \mathbf{a}_{kuu} , \mathbf{a}_{aur} ja \mathbf{a}_{asp} ovat Maan, Kuun ja Auringon gravitaatiosta sekä Auringon säteilypaineesta johtuvat kiihtyvyydet.

4.1.2 Gravitaatiokiihtyvyydet

Maan gravitaatiosta johtuvassa kiihtyvyydessä tulee huomioida Maan massan epäsymmetrinen jakautuminen. Jos Maa olisi symmetrinen pallo, gravitaatiokiihtyvyys riippuisi vain satelliitin etäisyydestä r ja gravitaatiopotentiaali U olisi muotoa

$$U(r) = \frac{GM_E}{r},$$

missä G on gravitaatiovakio ja M_E on Maan massa. Kun huomioidaan Maan massan epäsymmetrinen jakautuminen, gravitaatiopotentiaali U voidaan kirjoittaa lähteen [17, s. 57] mukaan muotoon

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM_E}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{R_E}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right] \quad (4.3)$$

Potentiaali U on yhtälössä (4.3) pituuspiirin λ ja leveyspiirin φ sekä satelliitin etäisyyden r funktio. Vakio R_E on Maan säde ja termit P_{nm} ovat vastaavat Legendren polynomit astein n ja m . Kertoimet S_{nm} ja C_{nm} ovat kokeellisesti määritettyjä vakioita. Näiden kertoimien suuruus laskee nopeasti, kun n ja m kasvavat, jolloin potentiaalia voidaan arvioida huomioimalla ainoastaan muutamat ensimmäiset termit yhtälöstä. Käytetyt termien määrät ovat $n = 8$ ja $m = 8$ [25]. Kertoimien S_{nm} ja C_{nm} arvot saadaan EGM2008-mallista [1]. Gravitaatiokiihtyvyyttä kuvaava a_g saadaan potentiaalin U gradienttina: $a_g(r, \lambda, \varphi) = \nabla U(r, \lambda, \varphi)$. [23, 25] Legendren polynomi P_{nm} sekä kertoimet S_{nm} ja C_{nm} on esitetty tarkemmin liitteessä A.

Pallosymmetrisen taivaankappaleen aiheuttaman gravitaatiovoiman kiihtyvyys voidaan saattaa muotoon

$$a_{tk} = GM \left(\frac{\mathbf{r}_{tk} - \mathbf{r}}{||\mathbf{r}_{tk} - \mathbf{r}||^3} - \frac{\mathbf{r}_{tk}}{||\mathbf{r}_{tk}||^3} \right), \quad (4.4)$$

missä M on taivaankappaleen massa, \mathbf{r}_{tk} on taivaankappaleen paikka maakeskeisessä intertiaalikoordinaatistossa ja \mathbf{r} on satelliitin paikka samassa koordinaatistossa. [25]

Yhtälössä (4.4) tarvitaan Auringon ja Kuun paikat, jotta voidaan laskea niiden aiheuttama kiihtyvyys. Auringon koordinaattien laskemista varten esitetään joitakin approksimoituja arvoja Auringon radasta [17, s. 70]:

$$\begin{aligned}
 a &= 149\,600\,000 \text{ km} \\
 e &= 0,016709 \\
 i &= 0,0000^\circ \\
 \Omega + \omega &= 282,9400^\circ \\
 M &= 357,5256^\circ + 35999,049^\circ \cdot T,
 \end{aligned}$$

missä

$$T = (\text{JD} - 2451545,0)/36525,0.$$

JD on Juliaaninen päivämäärä (Julian Date). Auringon ekliptinen longitudi λ_\odot ja etäisyys r_\odot ovat

$$\begin{aligned}
 \lambda_\odot &= \Omega + \omega + M + 6892'' \sin(M) + 72'' \sin(2M) \\
 r_\odot &= (149,619 - 2,499 \cos(M) - 0,021 \cos(2M)) \cdot 10^6 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

Paikka Karteesisessa koordinaatistossa saadaan muunnosmatriisin avulla, jolloin paikkavektori \mathbf{r}_\odot on

$$\mathbf{r}_\odot = \begin{bmatrix} r_\odot \cos(\lambda_\odot) \\ r_\odot \sin(\lambda_\odot) \cos(\eta) \\ r_\odot \sin(\lambda_\odot) \sin(\eta) \end{bmatrix},$$

missä $\eta = 23,43929111^\circ$.

Kuun koordinaattien laskemiseksi esitetään arvot

$$\begin{aligned}
 L_0 &= 218,31617^\circ + 481267,88088^\circ \cdot T - 1,3972^\circ \cdot T \\
 l &= 134,96292^\circ + 477198,86753^\circ \cdot T \\
 l' &= 357,52543^\circ + 35999,04944^\circ \cdot T \\
 F &= 93,27283^\circ + 483202,01873^\circ \cdot T \\
 D &= 297,85027^\circ + 445267,11135^\circ \cdot T,
 \end{aligned}$$

joiden avulla saadaan esitettyä Kuun longitudi

$$\begin{aligned}\lambda_M = & L_0 + 22640'' \cdot \sin(l) + 769'' \cdot \sin(2l) - 4586'' \cdot \sin(l - 2D) + 2370'' \cdot \sin(2D) \\ & - 668' \cdot \sin(l') - 412' \cdot \sin(2F) - 212' \cdot \sin(2l - 2D) - 206' \cdot \sin(l + l' - 2D) \\ & + 192' \cdot \sin(l + 2D) - 165' \cdot \sin(l' - 2D) + 148' \cdot \sin(l - l') - 125' \cdot \sin(D) \\ & - 110' \cdot \sin(l + l') - 55' \cdot \sin(2F - 2D)\end{aligned}$$

sekä latitudi

$$\begin{aligned}\beta_M = & 18520'' \cdot \sin(F + \lambda_M - L_0 + 412'' \cdot \sin(2F) + 541'' \cdot \sin(l')) \\ & - 526'' \cdot \sin(F - 2D) + 44'' \cdot \sin(l + F - 2D) - 31'' \cdot \sin(-l + F - 2D) \\ & - 25'' \cdot \sin(-2l + F) - 23'' \cdot \sin(l' + F - 2D) + 21'' \cdot \sin(-l + F) \\ & + 11'' \cdot \sin(-l' + F - 2D).\end{aligned}$$

Kuun etäisyys Maan keskipisteestä on

$$\begin{aligned}r_M = & (385\,000 - 20\,905 \cos(l) - 3\,699 \cos(2D - l) - 2\,956 \cos(2D) \\ & - 570 \cos(2l) + 246 \cos(2l - 2D) - 205 \cos(l' - 2D) - 171 \cos(l + 2D) \\ & - 152 \cos(l + l' - 2D)) \text{ km},\end{aligned}$$

joka Karteesisessa koordinaatistossa on [17, s. 72]

$$\mathbf{r}_M = R_x(-\eta) \begin{bmatrix} r_M \cos(\lambda_M) \cos(\beta_M) \\ r_M \sin(\lambda_M) \cos(\beta_M) \\ r_M \sin(\beta_M) \end{bmatrix}.$$

4.1.3 Auringon säteilypaine

Viimeinen voimamallissa huomioitu satelliitin kiihtyvyyteen vaikuttava komponentti on Auringon säteilypaine. Tälle saadaan muodostettua yhtälö

$$\mathbf{a}_{\text{asp}} = -\alpha \lambda P_0 (1 + \varepsilon) \frac{AU^2}{r_{\text{aur}}^2} \frac{A}{m} \mathbf{e}_{\text{aur}}, \quad (4.8)$$

missä r_{aur} on satelliitin etäisyys Auringosta, \mathbf{e}_{aur} on yksikkövektori satelliitista Aurinkoon. Muuttuja λ on säteilypaineen varjostusfunktio, jonka arvo muuttuu riippuen satelliitin paikasta auringossa tai varjossa. Vakio AU on astronominen yksikkö, P_0 on auringon säteilypaine Maan etäisyydellä, ε on satelliitin heijastuskerroin, m on satelliitin massa ja A on satelliitin aurinkopaneelien pinta-ala. Lisäksi yhtälössä (4.8)

oleva α on säteilypaineparametri, jolla tasoitetaan eri satelliittien tyyppien välisiä eroja. [25]

4.1.4 Alkutilan parannus

Alkutilaa voidaan parantaa ottamalla huomioon antennikorjaus BE:n antamissa paikkatiedoissa. Antennikorjaus kuvaa satelliitin massakeskipisteen ja antennin paikan eroa. BE antaa paikkatietona satelliitin antennin paikan, niinpä antennikorjaus pitää lisätä BE:n antamaan paikkatietoon.

4.1.5 Tilamalli

Satelliitin radan ennustuksessa käytetty tilamalli on muotoa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \text{eop} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

eli tilassa on kahdeksan ulottuvuutta. Paikka- ja nopeusvektorit \mathbf{r} ja \mathbf{v} ovat kolmiulotteisia ja napavariaatioparametrit x_p ja y_p ovat reaalityyppisiä. Napavariaatioparametrien uusimpia päivittäisiä arvoja löytyy IERS:n kotisivuilta [2]. Merkitään nyt napavariaatioparametrejä x_p ja y_p vektorilla eop .

Liikemalli olettaa satelliittiin vaikuttavan aiemmin tässä luvussa esitetyt voimat. Parametrit x_p ja y_p oletetaan vakioiksi. Käytetty mittausmalli olettaa mittauksissa olevan Gaussiset mittausvirheet.

4.2 Koordinaatistoista

Satelliitin radan ennustukseen liittyvistä koordinaatistoista on kerrottu tarkemmin esimerkiksi lähteissä [15, 23, 24, 25]. Seuraavassa on lyhyt katsaus tarvittaviin koordinaatistoihin.

GPS-satelliitti lähettää ratatietonsa WGS84-koordinaatistossa, joka on ECEF-koordinaatisto (Earth Centered Earth Fixed) eli maahan sidottu koordinaatisto. Tässä työssä riittävä tarkkuus on olettaa WGS84-koordinaatistossa saapuneen rataparametrin olevan ITRS-koordinaatistossa (International Terrestrial Reference System). ITRS-koordinaatisto on IERS:n (International Earth Rotation and Reference System Service) ylläpitämä ECEF-koordinaatisto.

Rataennusteet lasketaan inertiaalikoordinaatistossa, joka on ECI-koordinaatisto (Earth Centered Inertial) eli Maakeskeinen inertiaalikoordinaatisto. Inertiaalikoordinaatistossa koordinaatisto ei ole kiihtyvässä liikkeessä avaruuteen nähden, jolloin Newtonin lait pätevät siinä.

Eräs koordinaatisto on IERS:n ylläpitämä ICRS-koordinaatisto (International Celestial Reference System). ICRS-koordinaatiston origo on Maan keskipiste. Maan keskipiste on kuitenkin kiihtyvässä liikkeessä kiertäessään Aurinkoa, jolloin ICRS-koordinaatisto ei ole täsmälleen inertiaalikoordinaatisto. Tässä työssä ICRS-koordinaatisto on kuitenkin riittävän hyvä approksimaatio inertiaalikoordinaatistosta.

ICRS-koordinaatisto muunnetaan ITRS-koordinaatistoon ajanhetkellä t seuraavasti:

$$\mathbf{r}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{R}_{\text{ICRS}}^{\text{ITRS}}(t)\mathbf{r}_{\text{ICRS}},$$

missä

$$\mathbf{R}_{\text{ICRS}}^{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t).$$

Edellä esitetyssä kaavassa matriisi \mathbf{W} kuvaa napavariaatiota, matriisi \mathbf{G} Maan pyörimisliikettä, matriisi \mathbf{N} nutaatiota ja matriisi \mathbf{P} prekessiota.

Lisätietoa matriisien \mathbf{G} , \mathbf{N} ja \mathbf{P} laskemisesta löytyy esimerkiksi lähteistä [23, 24, 25]. Napavariaation muunnosmatriisi \mathbf{W} lasketaan seuraavalla kaavalla:

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_y(-x_p(t))\mathbf{R}_x(-y_p(t)), \quad (4.10)$$

missä x_p ja y_p ovat napavariaatioparametrit. Nämä kertovat kulman navan ja CIO:n (Conventional International Origin) eli konventionaalisen kansainvälisen origon välillä tietyllä hetkellä x- ja y-suunnissa. CIO on vuosien 1900-1905 keskimääräisen navan paikka [23].

Kaavassa (4.10) matriisit R_y ja R_x ovat muunnosmatriisit [13, s. 345]

$$R_y(a) = \begin{bmatrix} \cos(a) & 0 & -\sin(a) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a) & 0 & \cos(a) \end{bmatrix} \text{ ja } R_x(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}.$$

Napavariaatioparametrit sisältyvät EOP-parametreihin, kuten myös aikaero dUT1. Aikaero dUT1 on ero UT1-ajan (Universal Time) ja UTC-ajan (Coordinated Universal Time) välillä. Koska tämä aikaero on pieni, approksimoidaan että dUT1 ≈ 0 .

Tässä työssä inertiaalikoordinaatisto on ICRS:n sijasta TIRS(t_0)-koordinaatisto, ajanhetkellä t_0 . TIRS(t_0)-koordinaateista siirrytään ITRS(t)-koordinaatteihin muunnosmatriisien avulla seuraavasti:

$$\mathbf{r}_{\text{ITRS}} = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^T(t_0)\mathbf{N}^T(t_0)\mathbf{G}^T(t_0)\mathbf{r}_{\text{TIRS}(t_0)}. \quad (4.11)$$

Muutaman päivän mittaiselle ennustusjaksolle nutaatio- ja prekessiomatriisit pysyvät melkein vakioina. Silloin voidaan approksimoida, että $\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^T(t_0) \approx \mathbf{I}$ ja $\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^T(t_0) \approx \mathbf{I}$, jolloin yhtälö (4.11) yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{r}_{\text{ITRS}} = \mathbf{W}(t)\mathbf{R}_z((t - t_0)\omega)\mathbf{r}_{\text{TIRS}(t_0)}, \quad (4.12)$$

missä [13, s. 345]

$$\mathbf{R}_z(a) = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kaavassa (4.12) on käytetty tulosta

$$\mathbf{G}(t)\mathbf{G}^T(t_0) = \mathbf{R}_z((t - t_0)\omega),$$

missä ω on Maan pyörimisen keskimääräinen kulmanopeus [25].

Merkitään nyt muunnosmatriisia TIRS(t_0)-koordinaatistosta ITRS-koordinaatistoon matriisilla $T(t) = W(t)R_z((t - t_0)\omega)$. Silloin nopeuden koordinaatistomuunnos voidaan johtaa derivoimalla yhtälö (4.12) ajan suhteen, jolloin tulokseksi saadaan

$$\mathbf{v}_{\text{ITRS}} = T(t)\mathbf{v}_{\text{TIRS}(t_0)} - \mathbf{w} \times (T(t)\mathbf{r}_{\text{TIRS}(t_0)}),$$

missä

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

on Maan pyörimisen kulmanopeuden vektori.

4.3 Liikkeyhtälö ja sen ratkaisu

4.3.1 Yleistä

Yhdistämällä yhtälöt (4.1) ja (4.2), saadaan liikkeyhtälö muotoon

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_{\text{kuu}} + \mathbf{a}_{\text{aur}} + \mathbf{a}_{\text{asp}}.$$

Saatu yhtälö on muotoa

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r}),$$

eli se on kolmen toista astetta olevan differentiaaliyhtälön ryhmä.

Koska monet differentiaaliyhtälöiden numeerisista ratkaisumenetelmistä ratkaisevat vain 1. astetta olevia yhtälöitä, muutetaan yhtälöryhmä 1. asteen differentiaaliyhtälöryhmäksi lisäämällä muuttujat $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$. Näin saadaan ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \text{eop} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{a}(t, \mathbf{r}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Tässä yhtälössä otetaan huomioon neljä satelliittiin eniten vaikuttavaa voimaa. Napavariaatioparametrit x_p ja y_p oletetaan vakioiksi, jolloin $\dot{\text{eop}} = 0$.

Kaavassa (4.13) on esitetty jatkuva systeemi. Seuraavassa esitetään diskreetointi samasta systeemistä.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt \\ &= \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k), \end{aligned}$$

missä

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k).$$

Koska mallissa on epävarmuutta ja mallintamattomia voimia, lisätään diskreettiin järjestelmään suuri \mathbf{w}_k , joka on valkoista kohinaa. Suureella \mathbf{w}_k mallinnetaan suurimpia voimia, joita ei ole otettu mallissa huomioon, kuten Jupiterin ja Venuksen gravitaatiota sekä pienempiä voimia kuten vuoroveden vaikutus. Myös koordinaatistomuunnoksista syntyy pientä virhettä. Mallissa huomioidut voimatkin huomioidaan vain tietyllä tarkkuudella eli mallinnetuissakin voimissa on virhettä.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k,$$

missä $\mathbf{w}_k \sim N(0, Q)$. Prosessikohinamatriisi Q on esitetty liitteessä B.

4.3.2 Mittaukset

Tässä työssä saatavat mittaukset y_k ovat satelliitin lähettämiä broadcast-efemeridejä (BE). BE sisältää 16 rataparametria, joista satelliitin paikkakoordinaatit voidaan laskea halutulla ajanhetkellä [15]. Broadcast-efemeridit ovat tarkimmillaan kahden tunnin välein, koska satelliitti lähettää uuden efemeridin käyttäjälle joka toinen tunti. Mikäli satelliitin tila halutaan tietää jollain muulla ajanhetkellä, tulee broadcast-efemeridiä ekstrapoloida. Broadcast-efemeridit ovat voimassa neljä tuntia kerrallaan, kaksi tuntia taaksepäin ja kaksi tuntia eteenpäin. Tässä työssä on käytetty kuitenkin vähän pienempää voimassaoloaikaa broadcast-efemeridille; 1,5 tuntia taakse- ja eteenpäin. Paikkatietoja lasketaan broadcast-efemeridistä 15 min välein ja ne ajatellaan paikkamittauksina.

Koska broadcast-efemeridi antaa satelliitin antennin paikan eikä sen massakeskipisteen paikkaa, joka tarvittaisiin liikeradan ratkaisuun, tulee broadcast-efemeridistä saadulle tilalle tehdä myös antennikorjaus.

Mittaukset y_k muunnetaan ITRS-koordinaatistosta, joka on ECEF-koordinaatisto inertiaalikoordinaatistoon

$$\begin{aligned} y_k &= h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{TIRS}(t_0)}(\text{eop})\mathbf{r}_k + \mathbf{v}_k, \end{aligned}$$

missä suure $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R})$ on valkoista kohinaa. Valkoisuusoletus ei ole kuitenkaan kovin hyvä, sillä mittaukset ovat riippuvia toisistaan. Muunnos inertiaalikoordinaatistoon on epälineaarinen, koska parametrit eop vaikuttavat koordinaatistomuunnokseen.

4.3.3 Liikkeyhtälön ratkaisu

Koska posteriorijakaumaa ei saada ratkaistua analyttisesti, approksimoidaan sitä normaalijakaumalla [3]

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \approx N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k).$$

Tällöin posteriorijakaumasta tulee ratkaista vain odotusarvo \mathbf{m}_k ja kovarianssimatriisi \mathbf{P}_k . Odotusarvon ja kovarianssimatriisin ratkaisuun tarvitaan Rungen ja Kuttan menetelmää, joka on esitetty kappaleessa 4.3.4. Ennustejakauman odotusarvo \mathbf{m}_k^- ja kovarianssimatriisi \mathbf{P}_k^- saadaan ratkaisemalla seuraava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \mathbf{m}_k^- = \mathbf{g}_k(\mathbf{m}_{k-1}) \\ \mathbf{P}_k^- = \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{G}_k^T + \mathbf{Q}, \end{cases} \quad (4.14)$$

missä matriisi \mathbf{Q} on liitteessä B esitetty prosessikohinamatriisi. Matriisi \mathbf{G} on tilansiirtomatriisi ajanhetkeltä t_{k-1} ajanhetkelle t_k .

Yhtälöryhmän (4.14) ratkaisemiseksi ratkaistaan differentiaaliyhtälöt (4.15) Rungen ja Kuttan menetelmällä ajanhetkeltä t_{k-1} ajanhetkelle t_k

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{f}(\mathbf{m}, t) \\ \dot{\mathbf{G}}(t, t_{k-1}) = \mathbf{F}(t)\mathbf{G}(t, t_{k-1}) \end{cases} \quad (4.15)$$

alkuehdoilla [13, s. 199][26, s. 165]

$$\begin{cases} \mathbf{m} = \mathbf{m}_{k-1} \\ \mathbf{G}(t_{k-1}, t_{k-1}) = \mathbf{I}. \end{cases}$$

Matriisi $F(t)$ on funktion $f(t)$ derivaatta

$$F(t) = \left[\frac{df}{dx} \right] \bigg|_{x=m}.$$

Kaavan (4.15) ylemmästä yhtälöstä saadaan ratkaistua vektori m_k^- ja alemmasta yhtälöstä matriisi G_k , joka sitten voidaan sijoittaa kaavaan (4.14) kovarianssimatriisiin ratkaisemiseksi.

Edellä esitetty pätee, kun satelliitin radan ennustukseen käytetään EKF-suodatinta. Kun ennustuksessa käytetään Gaussin mikstuuri -suodatinta tehdään kullekin komponentille yksittäin ennustus käyttäen EKF-suodatinta. Ennustusvaiheessa, kun mittauksia ei ole saatavilla, komponenttien painot pysyvät vakioina.

4.3.4 Rungen ja Kuttan menetelmä

Rungen ja Kuttan menetelmä ratkaisee alkuarvoprobeleman

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Rungen ja Kuttan menetelmä ratkaisee alkuehdolla $y(t_0) = y_0$ miten systeemin tila kehittyy ajan kasvaessa. Tämä voidaan esittää muodossa

$$y(t_0 + h) = y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, y(t)) dt \stackrel{\text{merk.}}{=} y_1,$$

missä haettu uusi tila on $y(t_0 + h)$. Rungen ja Kuttan menetelmällä approksimoidaan yhtälön integraaliosaa. Saatua tulosta voidaan käyttää uutena alkuehtona Rungen ja Kuttan algoritmille. Rungen ja Kuttan menetelmä on esitetty algoritmissa 4.

Algoritmi 4 Rungen ja Kuttan menetelmä

Menetelmässä on s vaihetta, kertoimet a_{ij} , $1 \leq j < i \leq s$ ja b_i , $i = 1, 2, \dots, s$ ovat reaalilukuja ja $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$. S :n vaiheen Rungen ja Kuttan menetelmä laskee arvon $y_{n+1} \approx y(t_n + h)$ seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, y_0) \\ k_2 &= f(t_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1) \\ k_3 &= f(t_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i. \end{aligned}$$

Tämän algoritmin avulla muodostetaan eri Runge ja Kutta menetelmiä valitsemalla kertoimet a_{ij} ja b_i eri tavoilla. Kertoimet a_{ij} ja b_i ilmoitetaan yleensä taulukkomuodossa ns. Butcherin taulukolla. [10, 14]

Taulukko 4.1: Butcherin taulukko Runge ja Kutta menetelmän kertoimille.

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

Bogackin ja Shampinen menetelmä on eräs Runge ja Kutta menetelmä [10]. Se on kolmannen kertaluvun integrointimenetelmä (RK3), eli se toteuttaa epäyhtälön

$$\|y(t_1) - y_1\| \leq Ch^{p+1}, C \in \mathbb{R}$$

silloin, kun $p = 3$. RK3-menetelmän kertoimet ovat taulukon 4.2 mukaiset.

Taulukko 4.2: Bogackin ja Shampinen menetelmän kertoimet.

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	
RK3	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

Luku 5

Kokeelliset tulokset

Tässä luvussa esitetään kokeelliset tulokset, jotka on saatu ennustettaessa satelliitin rataa sekä EKF-suodattimella että Gaussin mikstuuri-suodattimella. Testeissä on käytetty luvussa 4 esitettyä rataennustuksen mallia sekä luvussa 3 esitettyä sigmapistemenetelmää Gaussin mikstuurin komponenttien jakamiseksi. Liikkeyhtälön ratkaisuun on käytetty luvussa 4 esitettyä Rungen ja Kuttan menetelmän Bogackin ja Shampinen menetelmää. Gaussin mikstuuria käytettäessä komponenttien jakoa on testattu kahdella tavalla: jakamalla komponentit jo ennen sovitusta sekä jakamalla komponentit vasta alkutilan sovituksen jälkeen, ennustusvaiheen alussa.

5.1 Satelliitin radan ennustaminen EKF- ja GMF-suodattimilla

Satelliitin rataa ennustetaan pitäen alkutilana broadcast-efemeridistä (BE) saatua tilaa. Odotusarvo paikalle ja nopeudelle saadaan BE:stä, napavariaatioparametreille x_p ja y_p alkutilan odotusarvoksi voitaisiin valita $x_p = y_p = 0$. Kuitenkin tehdyissä testiajoissa näille parametreille on haettu Internetistä tarkat arvot. Testauksessa käytetty alkutilan kovarianssimatriisi on ECEF-koordinaatistossa suuruudeltaan

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 4\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 10^{-6}\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & 10^{-14}\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

Testeissä käytetty mittausmallin kovarianssimatriisi on [12]

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3}.$$

Tilamallin prosessikohina oletetaan vakioksi ja sen suuruus on esitetty liitteessä B.

EKF:n sovituvaiheessa annetaan suodattimelle mittauksina broadcast-efemeridistä paikkatietoja kolmen tunnin ajalta; 1,5 h taaksepäin ja 1,5 h eteenpäin broadcast-efemeridin lähetysajasta. Näitä paikkatietoja on laskettu broadcast-efemeridistä 15 min välein.

Testit on suoritettu satelliiteille 3, 5, 7, 11, 15 ja 28. GPS-satelliitit kulkevat kuudella eri ratatasolla ja nämä testaukseen käytetyt kuusi satelliittia on valittu siten, että ne ovat kaikki eri ratatasoilta. Testit on suoritettu GPS-viikkojen 1613-1637 efemerideistä. Nämä GPS-viikot vastaavat aikaa joulukuusta 2010 toukokuuhun 2011. Jokaiselta käytetyltä GPS-viikolta on otettu kolme eri alkuajanhetkeä, joille testit on tehty. Nämä alkuajanhetket ovat joka viikon alusta kahden, neljän ja kuuden tunnin kohdalla. Näin testejä on tehty yhteensä kuudelle satelliitille ja $25 \cdot 3 = 75$ eri alkuajanhetkelle. Siten ennusteiden lukumäärä olisi 450, mutta ennusteita on kuitenkin muutama vähemmän, sillä välillä satelliitista ei ole saatavilla broadcast-efemeridiä, jolloin ennustusta ei ole voitu toteuttaa. Tarkka ennusteiden määrä on 381.

5.1.1 Sigmapistemenetelmä

Gaussin mikstuuri -suodatinta käytettäessä, testaus on tehty kahdella tavalla. Ensimmäisessä tavassa komponenttien jako tehdään heti alussa, ennen alkutilan sovituksia. Tästä tavasta käytetään mekintää SPGM1. Toisella tavalla testattaessa komponenttien jako tehdään alkutilan sovituksen jälkeen, ennustusvaiheeseen siirryttäessä. Merkitään tätä jatkossa SPGM2. Komponenttien vähentämiseen on käytetty unohdusmenetelmää kynnyksarvolla 10^{-8} .

Sigmapistemenetelmän parametrien τ ja κ sopivien arvojen löytämiseksi on tutkittu eri parametrien vaikutusta ennustustarkkuuteen. Tämä on tehty seuraavassa kappaleessa 5.1.2. Komponentteja on sigmapistemenetelmässä yhteensä 17, sillä tila on 8-ulotteinen eli $n = 8$ ja komponentteja tulee sigmapistemenetelmällä jaettaessa $2n + 1$.

Kuvassa 5.1 on esitetty kaksi esimerkkiä Gaussin mikstuurin komponenteista ja niiden yhdistejakaumasta viiden päivän ennustuksen jälkeen. Kuvat ovat paikan x-suunnasta ja nopeuden x-suunnasta ECEF-koordinaatistossa satelliitille PRN 5 GPS-viikolta 1613. Komponentteja on 17 ja ne on jaettu sigmapistemenetelmällä. Havaitaan, että komponentit ovat likimain samanmuotoisia ja niiden odotusarvotkin ovat lähellä toisiaan. Yhdistejakauma näyttää likimain normaalijakaumalta. Kuvassa komponentit on piirretty sinisellä ja yhdistejakauma punaisella ja tiheysfunktion arvot on esitetty logaritmisella asteikolla.

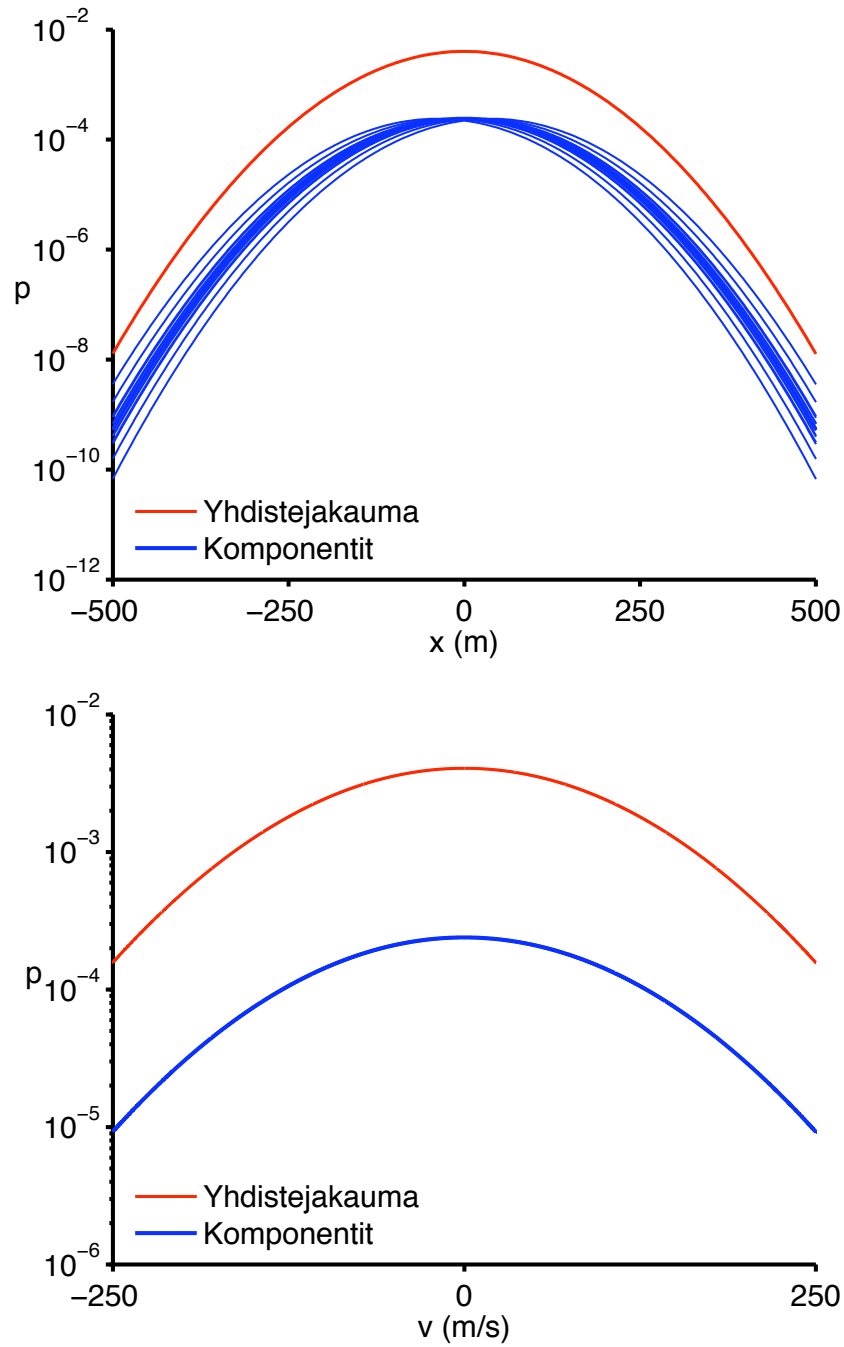
5.1.2 Parametrien valinta

Tässä kappaleessa esitetään tulokset, jotka on saatu testaamalla parametrien τ ja κ muutoksen vaikutusta ennustustarkkuuteen. Testaukset on tehty kolmelle eri satelliitille (PRN 3, 7 ja 18) ja yhdelle alkuajanhetkelle kolmella eri GPS-viikolla (1613-1615). Seuraavaksi on esitetty tulokset, jotka saadaan, kun komponenttien jako on tehty heti testauksen alkuun (SPGM1). Kuvissa 5.2 ja 5.3 on esitetty kahden päivän ennustuksen 3D-virhe, kun parametrien arvoja on muutettu. Kuvassa 5.2 parametri κ pysyy vakiona ja parametri τ muuttuu. Vastaavasti kuvassa 5.3 parametri τ pysyy vakiona, kun parametria κ muutetaan.

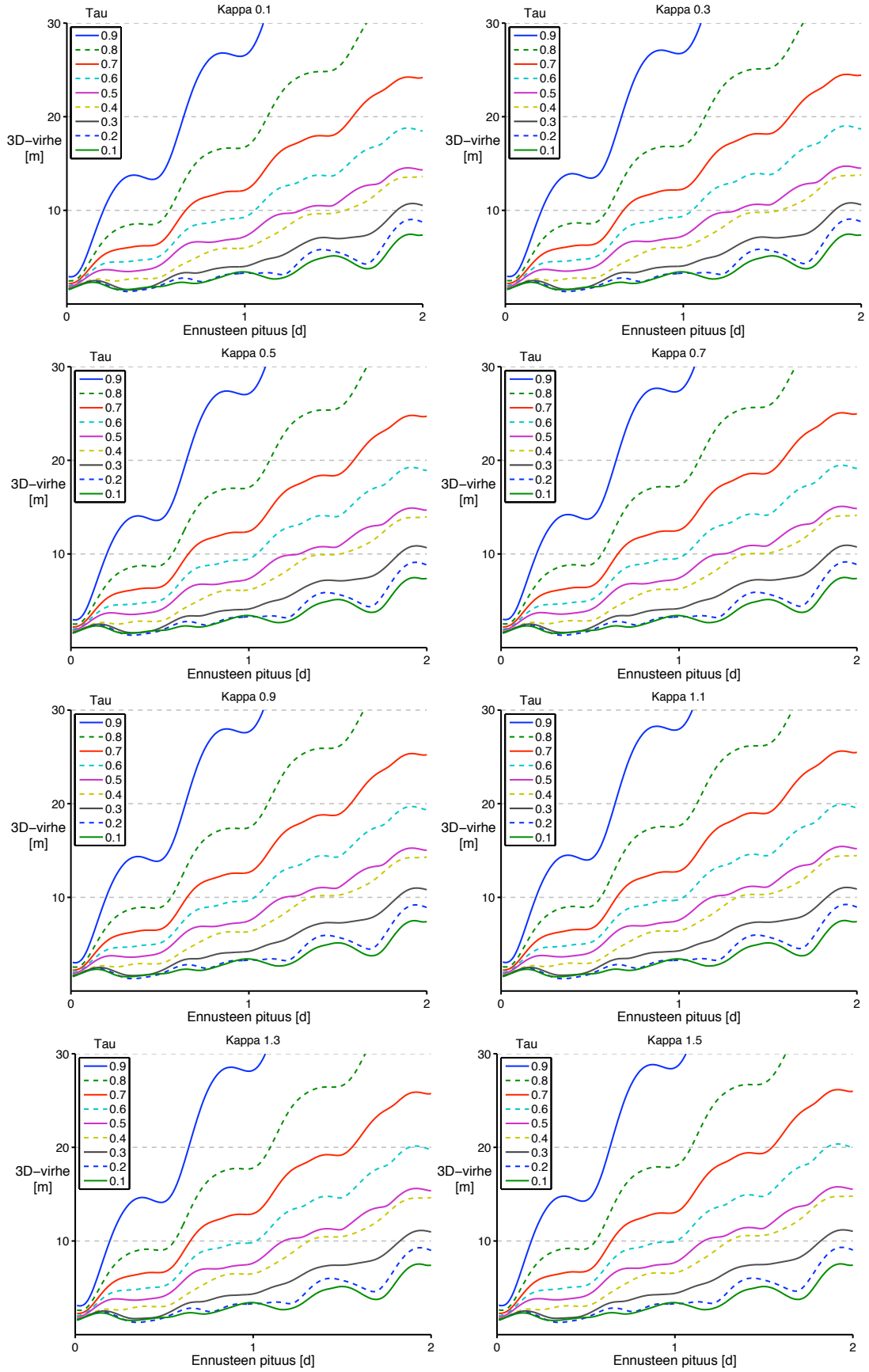
Kuvista 5.2 ja 5.3 havaitaan, että parametrin κ muuttuessa, ennustusvirheessä ei tapahdu suuria muutoksia. Kun parametria τ muutetaan, saadaan pienemmillä parametrin τ arvoilla pienempiä ennustusvirheitä kuin suuremmilla.

Testatattaessa SPGM2-menetelmän ennustusvirheen muuttumista parametrien muuttuessa, havaitaan ettei parametrien muutoksella ole kuin todella vähäinen vaikutus ennustusvirheeseen. Kahden päivän ennustuksen jälkeen ennustusvirheiden suuruuden ero on nanometrin luokkaa.

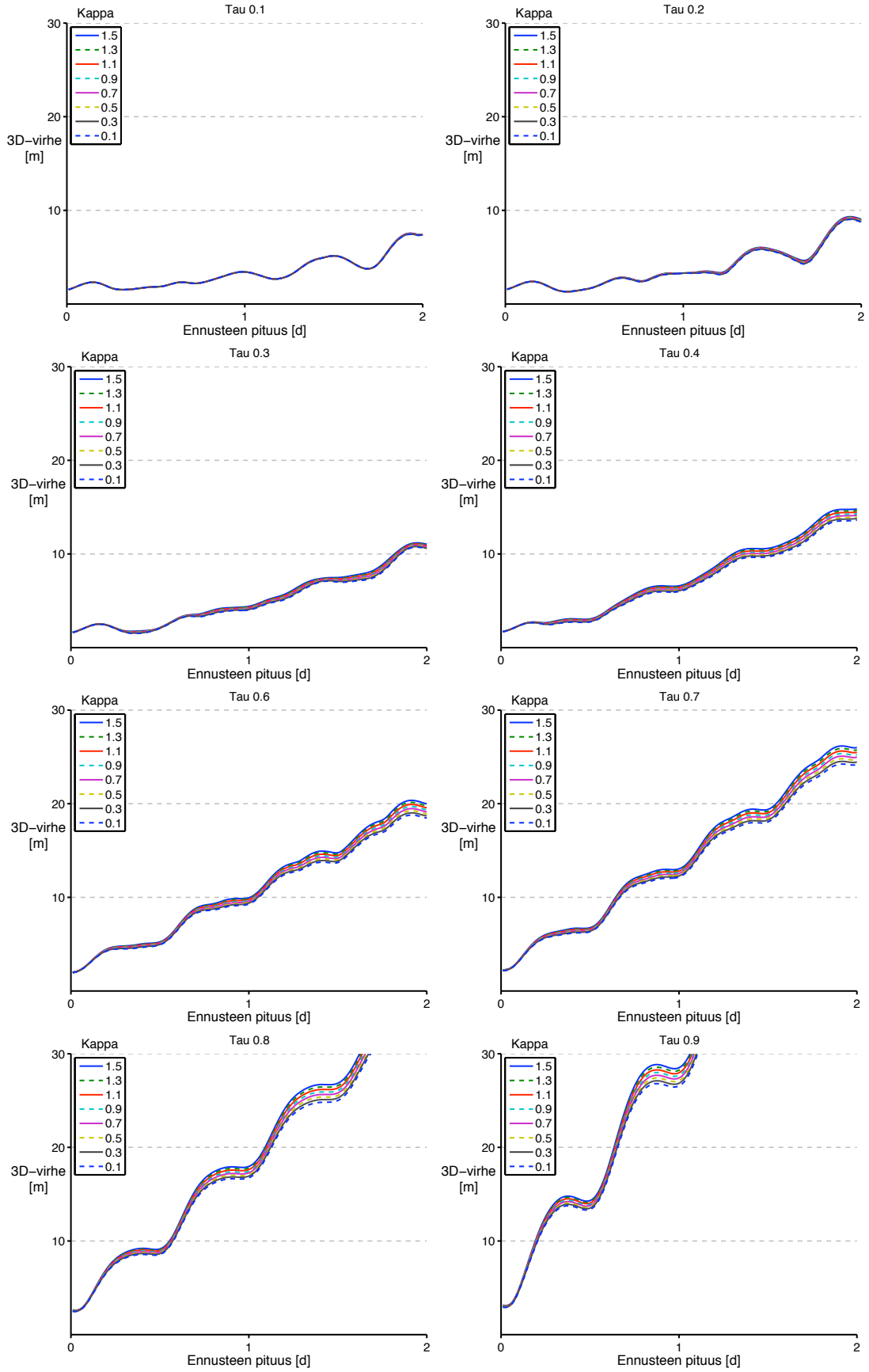
Näiden testien perusteella molempiin menetelmiin SPGM1 ja SPGM2 parametreiksi valitaan $\tau = 0, 1$ ja $\kappa = 0, 5$.



Kuva 5.1: Sigmapistemenetelmällä jaetut GM-komponentit viiden päivän ennustuksen jälkeen sekä niiden yhdistejakauma. Ylemmässä kuvassa on esitetty paikan x -suunta ja alemmassa kuvassa nopeuden x -suunta ECEF-koordinaatistossa. tiheysfunktion arvot on esitetty logaritmiasteikolla.



Kuva 5.2: Ennustuksen 3D-virhe kahden päivän ennustuksessa, kun parametri κ pysyy vakiona ja parametria τ muutetaan.



Kuva 5.3: Ennustuksen 3D-virhe kahden päivän ennustuksessa, kun parametri τ pysyy vakiona ja parametria κ muutetaan.

5.2 Saadut tulokset

5.2.1 Satelliitin rataennustus

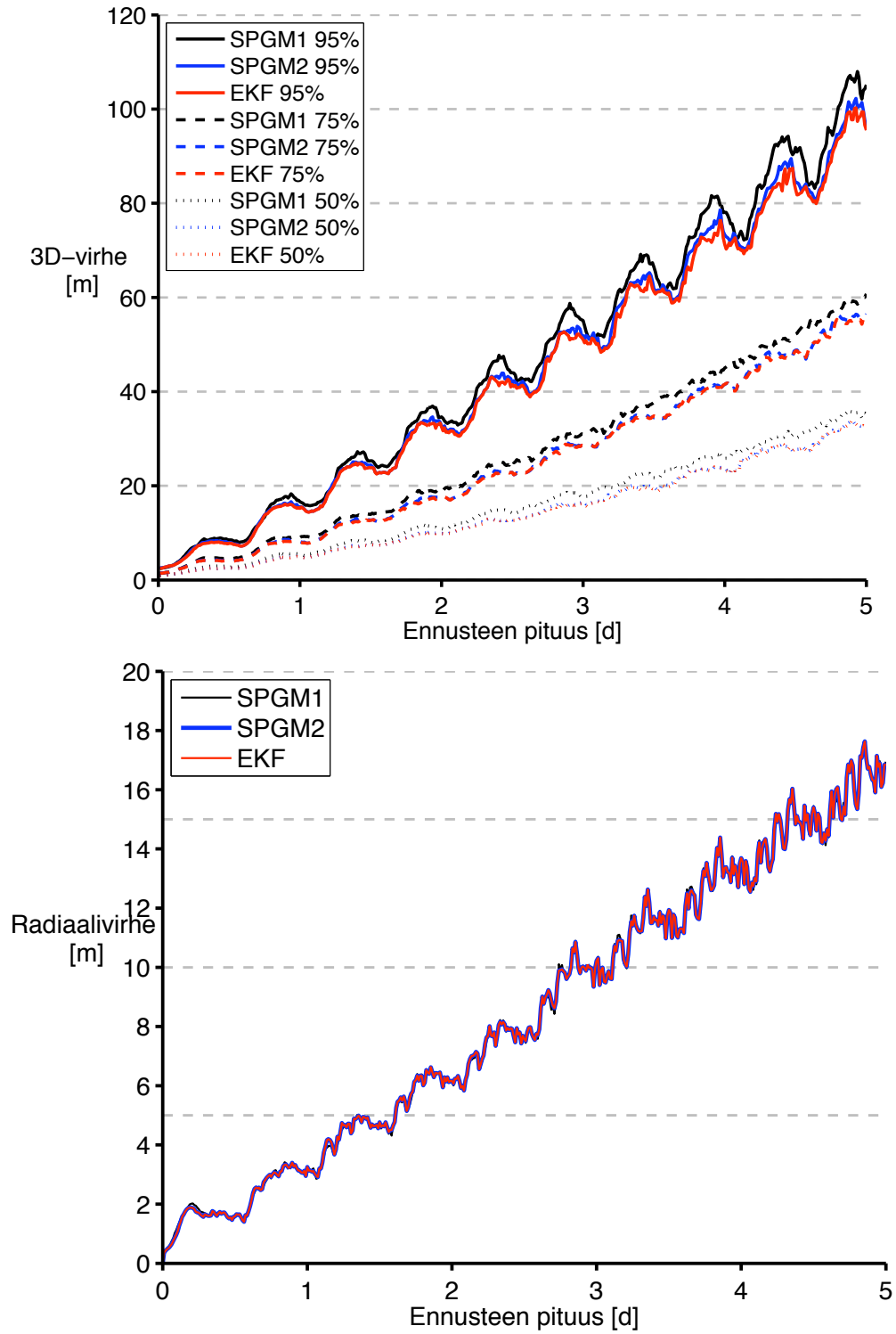
Satelliitin ennustettua rataa verrataan precise-efemeridin (PE), eli tarkan efemeridin antamaan paikkaan. Precise-efemeridi on tarkempi kuin broadcast-efemeridi, mutta sen laskemisen voi mennä noin kaksikin viikkoa. Testeissä ennustetta on verrattu International GNSS Servicen (IGS) tarjoamaan precise-efemeridiin.

Tässä kappaleessa on esitetty tulokset, jotka on saatu käyttämällä sigmapistemenetelmiä SPGM1 ja SPGM2 sekä vertailuna on esitetty EKF:llä saadut ennustustulokset. Gaussin mikstuuri -suodatinta käytettäessä, kunkin ajanhetken paikkaestimaattina on käytetty mikstuurin antamaa odotusarvoa.

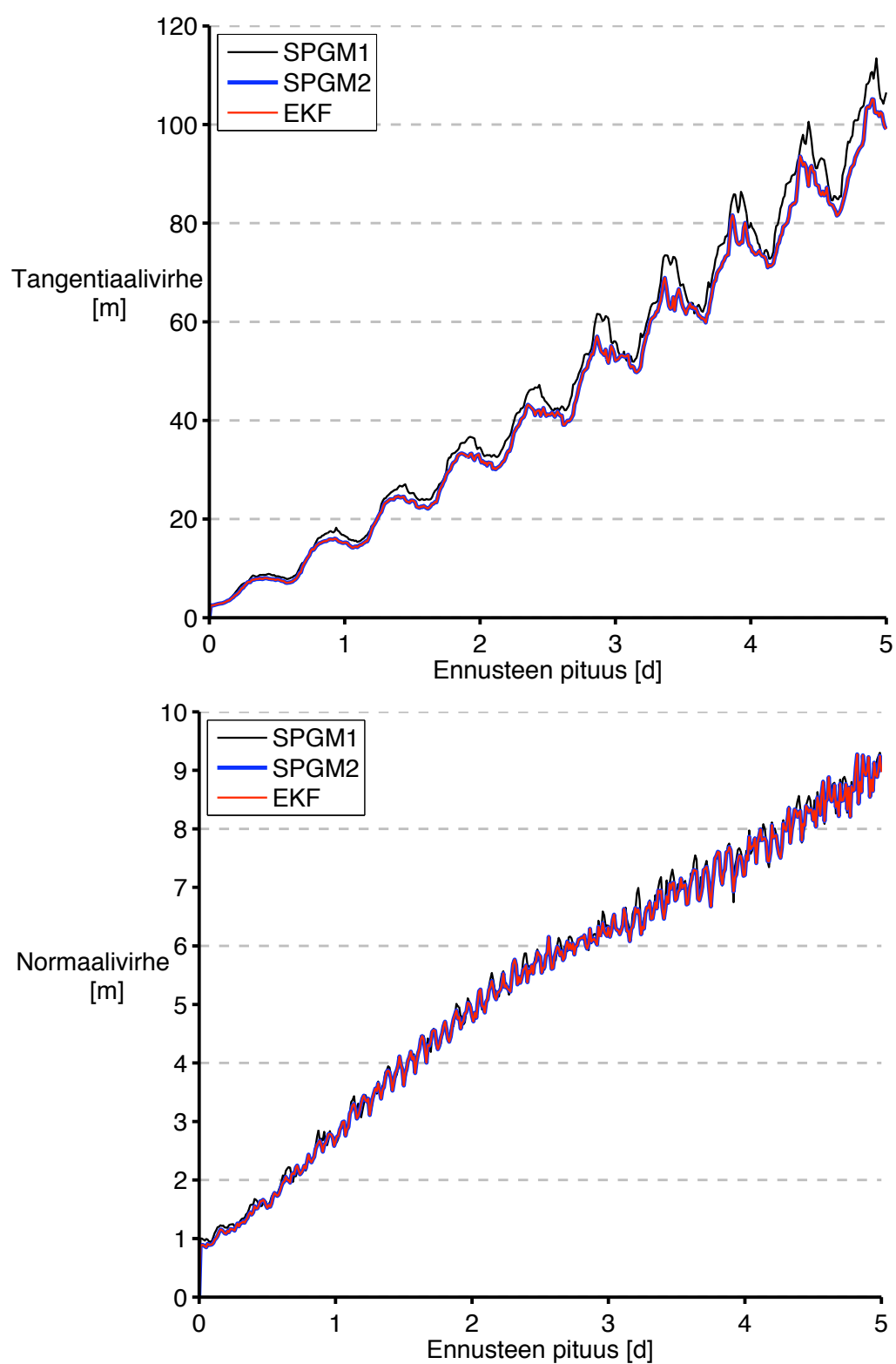
Tuloksissa on vertailtu eri menetelmien virheitä verraten satelliitin paikan 3D-virhettä, sekä RTN-koordinaatistossa tarkasteltuja paikan radiaali-, tangentiaali- ja normaalivirheitä. Kuvissa 5.4 ja 5.5 on esitetty nämä ennustusvirhetulokset ajan funktiona kaikille käytetyille menetelmille.

Kuvissa 5.6 ja 5.7 on esitetty laatikkokuvio eri menetelmien ennustusvirheille. Kuvassa laatikkokuvion viikset vastaavat 5 %:n ja 95 %:n kvantiilia, laatikon ala- ja yläreunat 25 %:n ja 75 %:n kvantiilia ja laatikon sisällä oleva poikkiviiva mediaanivirhettä.

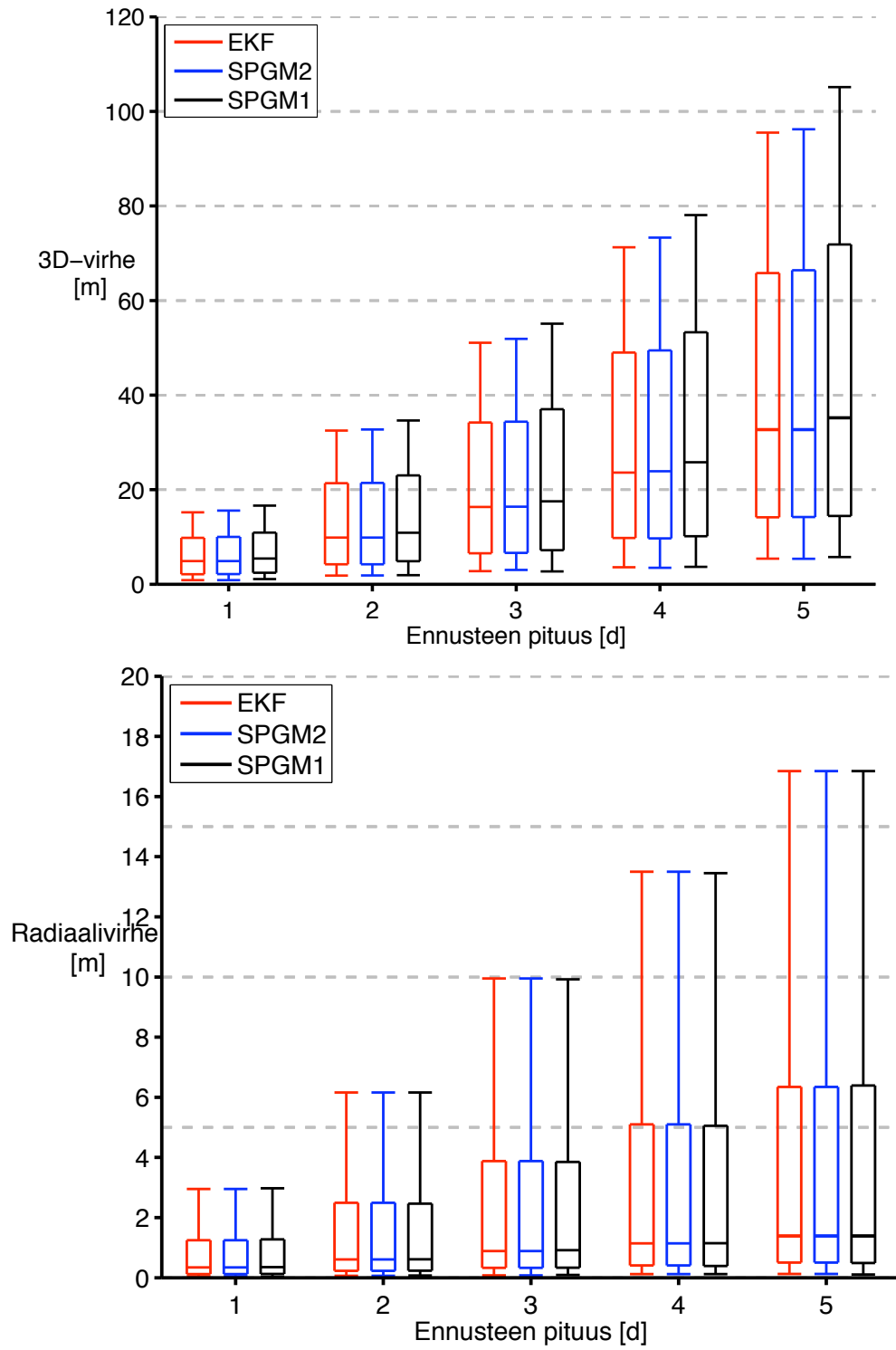
Kuvassa 5.8 on esimerkkejä ennusteen jakaumasta viiden päivän ennustuksen jälkeen SPGM1-menetelmällä. Kuvassa on esitetty precise-efemeriksestä saadun paikan x- ja y-koordinaatit mustalla. Tämän lisäksi kuvassa on jokaisen Gaussin mikstuurin komponentin odotusarvo ja 50 %:n ellipsi piirrettynä sinisellä ja yhdistejakauman odotusarvo ja 50 %:n ellipsi punaisella. Kuvat on piirretty satelliitille 15 GPS-viikolla 1613 kahdella eri alkuajanhetkellä.



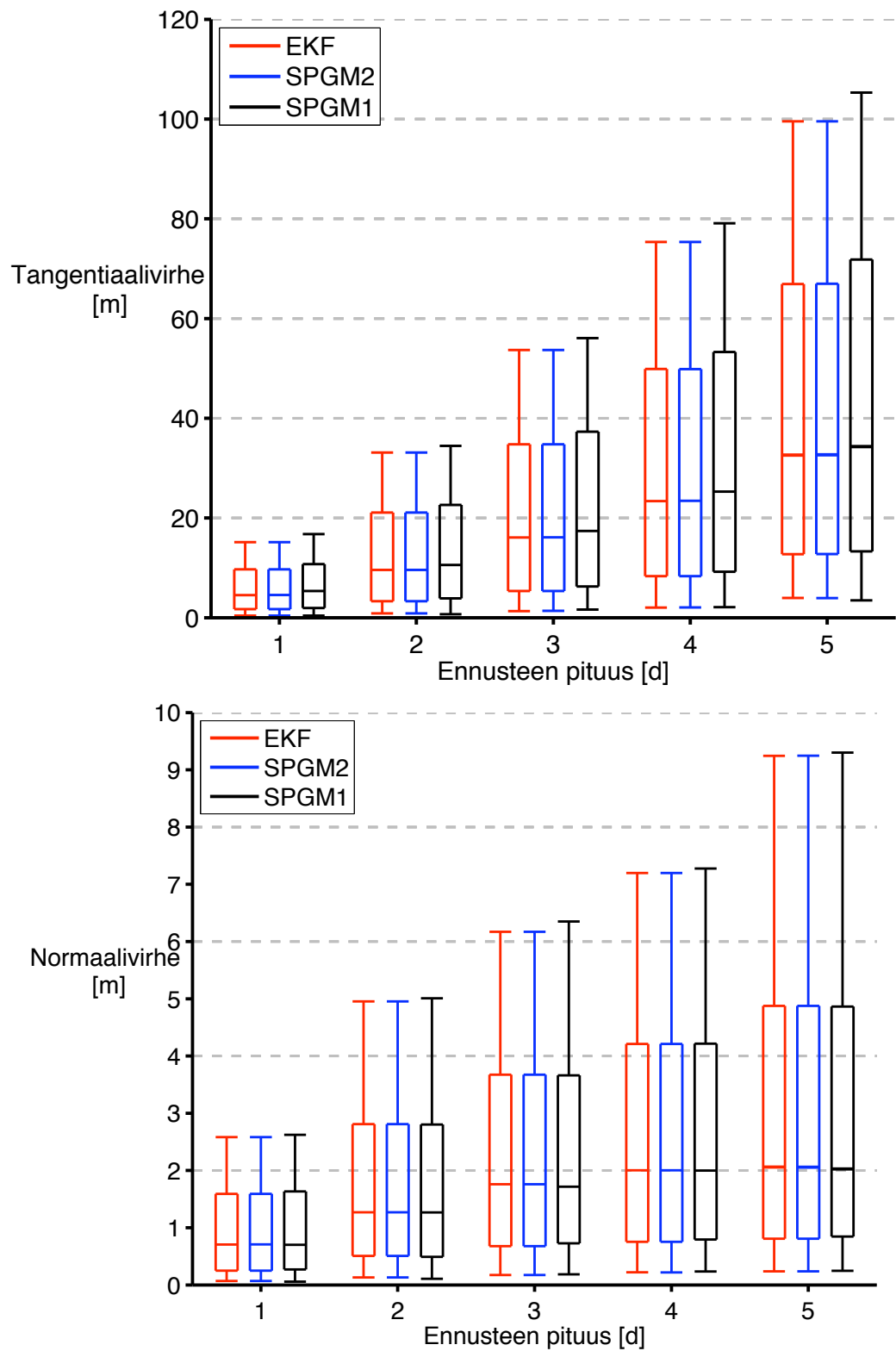
Kuva 5.4: Ylemmässä kuvassa on esitetty satelliitin ennustusvirheistä paikan 3D-virhe ja alemmassa 95 %:n kvantiili paikan radiaalivirheestä.



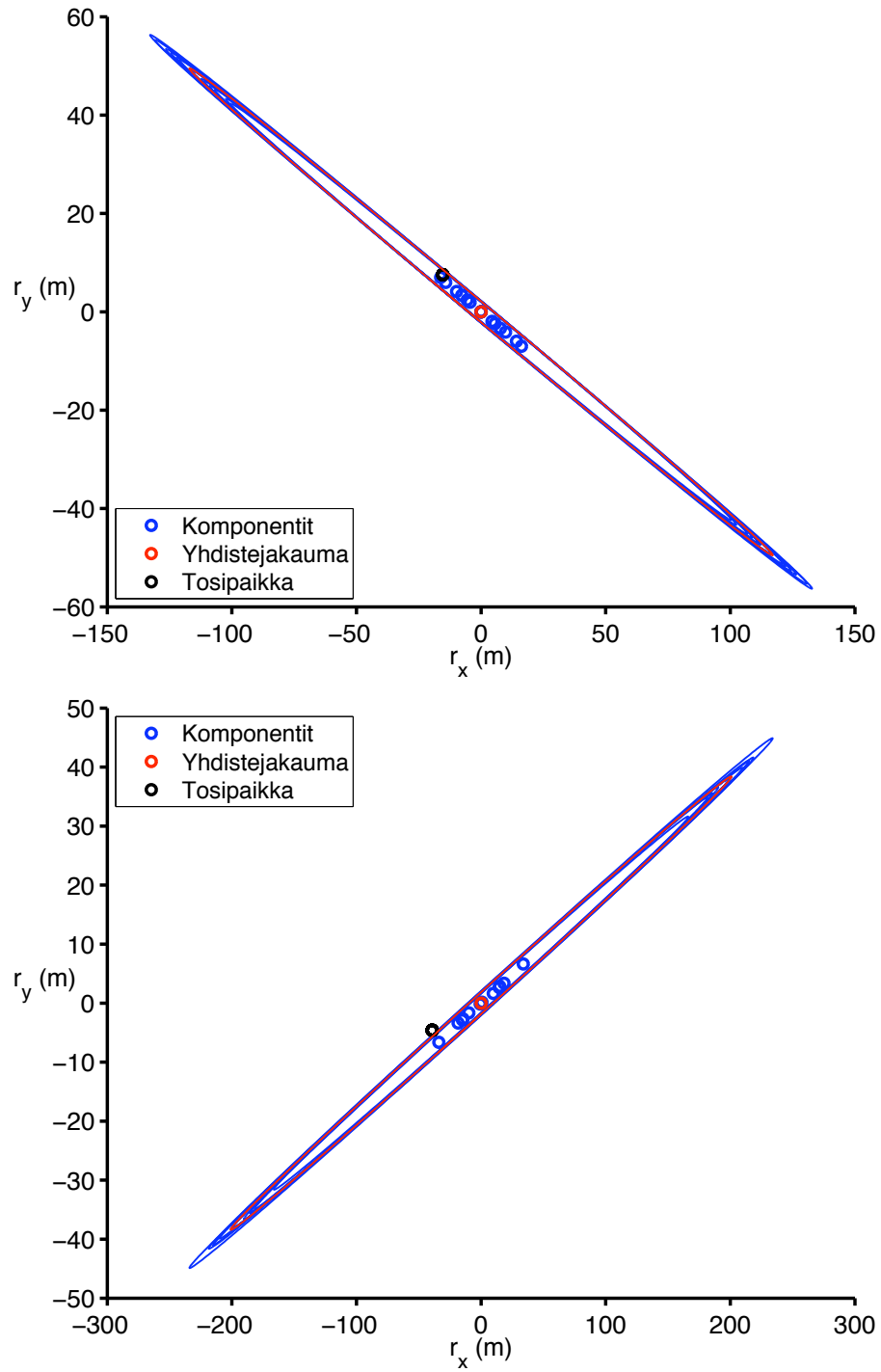
Kuva 5.5: Ylemmässä kuvassa on esitetty satelliitin ennustusvirheistä 95 %:n kvanttiili paikan tangentiaalivirheestä ja alemmassa normaalivirheestä.



Kuva 5.6: Ylemmässä kuvassa on esitetty satelliitin ennustusvirheistä paikan 3D-virheen laatikkokuva ja alemmassa vastaava kuvio paikan radiaalivirheestä.



Kuva 5.7: Ylemmässä kuvassa on esitetty satelliitin ennustusvirheistä paikan tangentiaalivirheen laatikkokuva ja alemmassa vastaava kuvio paikan normaalivirheestä.



Kuva 5.8: Kuvissa on esitetty satelliitin tosipaikan x - ja y -koordinaatit mustalla, paikka komponenteittain sinisellä ja yhdistejakauman paikka punaisella. Esimerkkitaipaukset on piirretty satelliitille 15 kahdella eri alkuajanhetkellä SPGM1-menetelmällä.

5.2.2 Konsistenttius

Eri menetelmien konsistenttiutta testataan seuraavalla tavalla. Kaikille tehdyille testitapauksille lasketaan toteuttaako tapaus yhtälön

$$\|\Psi\|^2 = (\mathbf{m}_{\text{est}} - \mathbf{m}_{\text{tosi}})^T (\mathbf{P}_{\text{est}})^{-1} (\mathbf{m}_{\text{est}} - \mathbf{m}_{\text{tosi}}) \leq \chi^2_{\text{inv}}(p, v) = 7,8147. \quad (5.1)$$

Muuttujaan p sijoitetaan haluttu todennäköisyys, nyt 0,95. Tällöin testitapausten pitäisi toteuttaa yhtälö (5.1) 95 % kerroista. Muuttuja v on vapausasteiden määrä, joka on tässä tapauksessa kolme, koska testataan paikan konsistenttiutta ja paikka on kolmiulotteinen. Tämä NEES-testi (Normalised Estimation Error Squared) olettaa jakaumien olevan Gaussisia. Kuitenkaan aina ennustejakaumat eivät ole Gaussisia, joten testataan menetelmien konsistenttiutta myös toisella testillä, joka ei olelta jakaumilta Gaussisuutta. Tämä testi on yleinen epäkonsistenttiustesti (General Inconsistency Test, YE).

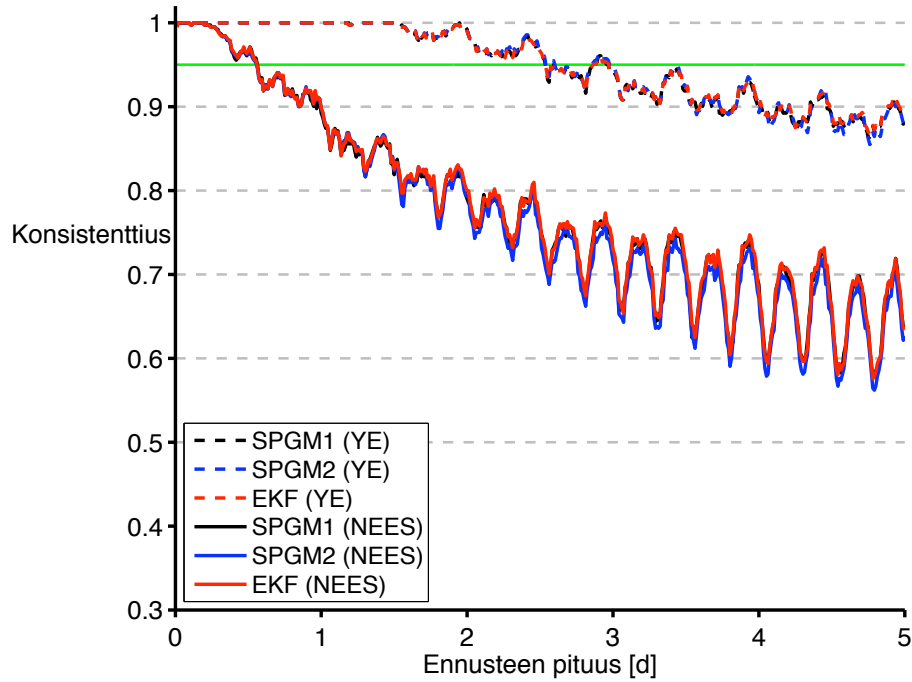
$$\|\Psi\|^2 < \frac{v}{\alpha} = 60,$$

missä riskitaso α on $\alpha = 5 \%$ ja $v = 3$.

Eri menetelmien konsistenttiutta molemmilla yllä esitetyillä testimenetelmillä on kuvattu kuvassa 5.9. Kuvassa on esitettynä 95 %:n konsistenttiudet ajan funktiona. Taulukkoon 5.1 on koottu kaikkien menetelmien konsistenttius kunkin ennustus-päivän kohdalla.

Taulukko 5.1: Eri menetelmien 95 %:n konsistenttiudet NEES-testillä ja yleisellä epäkonsistenttiustestillä (merk. YE).

NEES/YE	EKF	SPGM1	SPGM2
Päivä 1	0,90 / 1,00	0,89 / 1,00	0,90 / 1,00
Päivä 2	0,80 / 0,99	0,79 / 0,99	0,79 / 0,99
Päivä 3	0,73 / 0,94	0,72 / 0,94	0,72 / 0,95
Päivä 4	0,68 / 0,90	0,69 / 0,90	0,67 / 0,89
Päivä 5	0,64 / 0,89	0,64 / 0,88	0,63 / 0,87

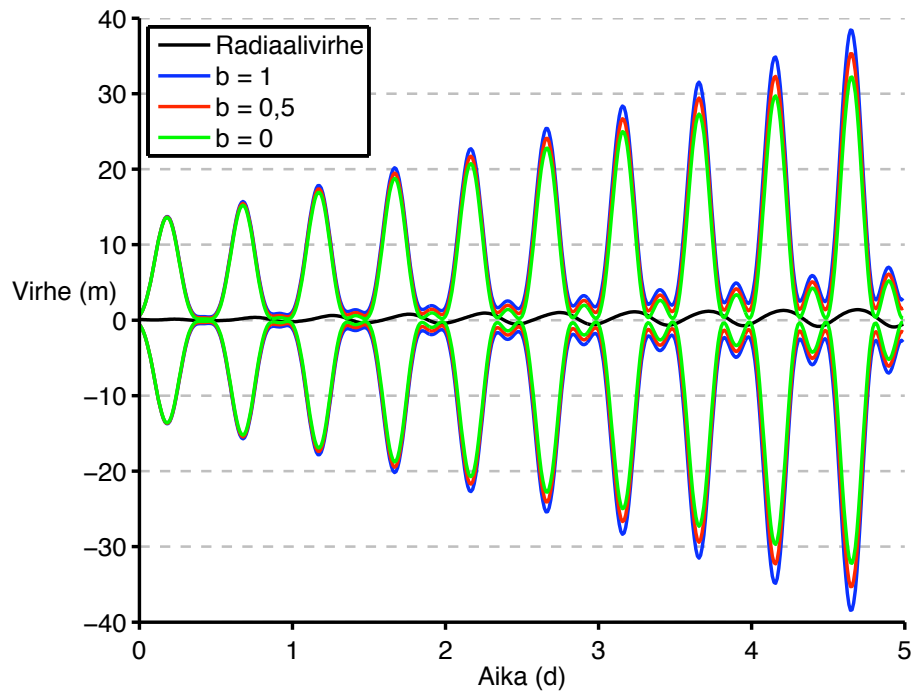


Kuva 5.9: EKF-, SPGM1- ja SPGM2-menetelmien 95 %:n konsistenttiudet ajan funktiona laskettuna sekä NEES-testillä että yleisellä epäkonsistenttiustestillä.

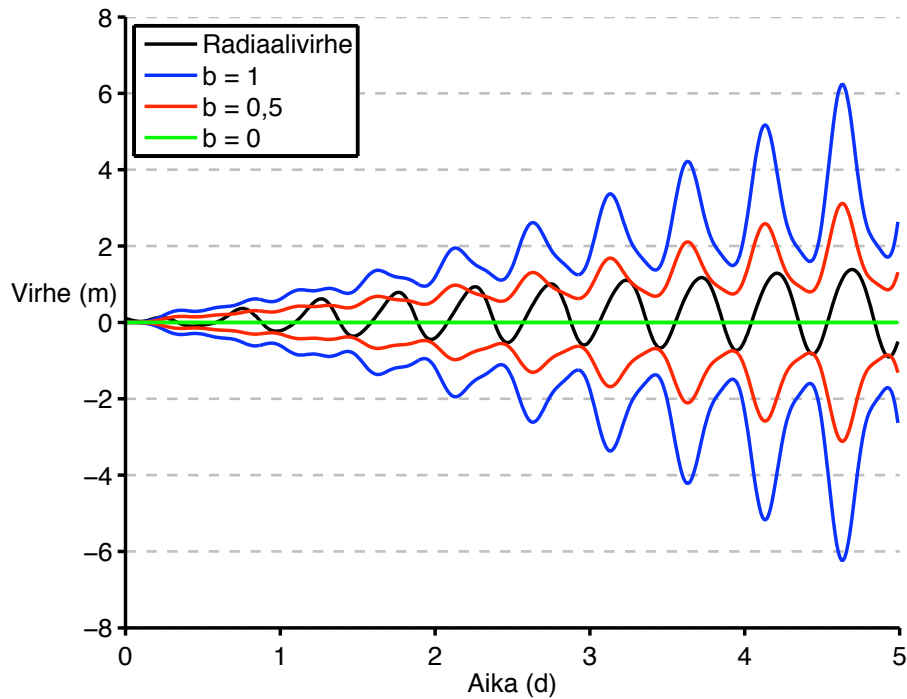
5.2.3 Ennustusvirheen hajonta

Kuvissa 5.10, 5.12 ja 5.14 on esitetty EKF:llä ennustetun radan esimerkkiennustuksen virhe RTN-koordinaatistossa sekä vastaava keskihajonta σ , kun prosessikohinamatriisin Q kertoimena on käytetty muuttujaa b . Kuvissa 5.11, 5.13 ja 5.15 on vastaavat kuvat kuin 5.10, 5.12 ja 5.14 mutta siten, että viimeisen broadcast-efemeridistä saadun mittauksen jälkeen kovarianssimatriisi on asetettu nollaksi. Esimerkkikuvat ovat satelliitille PRN 3 GPS-viikolta 1613.

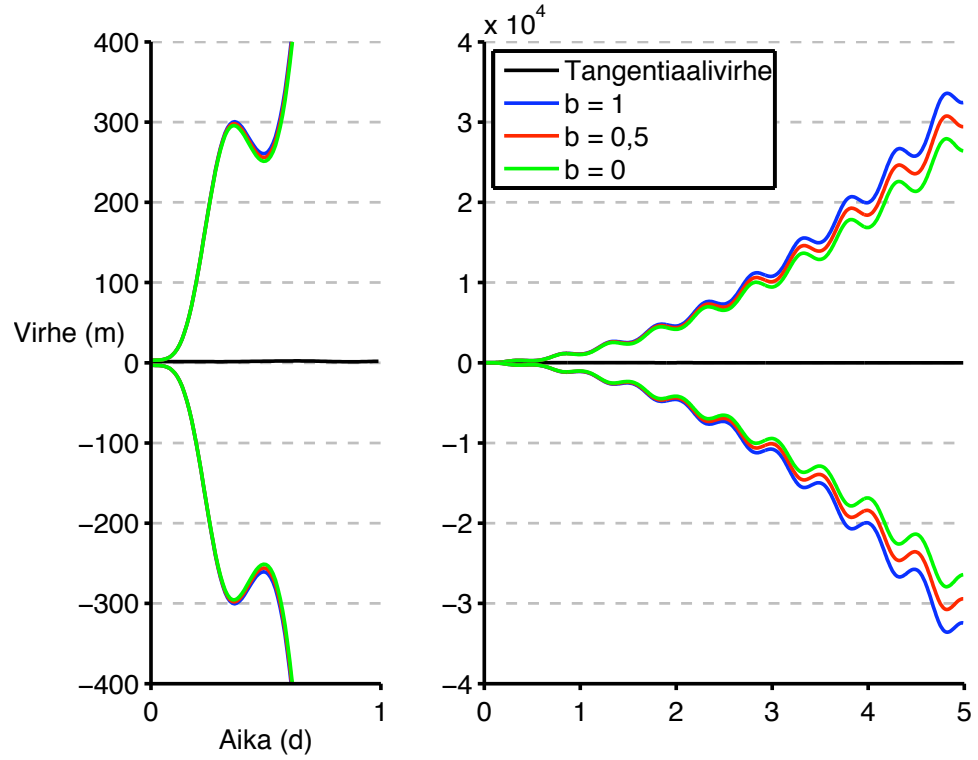
Kuvista havaitaan, että mittausmallin kovarianssimatriisi on todennäköisesti väärä. Oletuksena mittausmallin kovarianssimatriisiksi on RTN-koordinaatistossa $R = I$. Todennäköisesti virhe ei kuitenkaan ole joka suuntaan sama eli esimerkiksi radiaalisuunnassa virhe saattaa olla alle metrin. Mittausmallin kovarianssimatriisin ollessa liian iso, alkutilan virhe muodostuu liian isoksi. Kuvat 5.10-5.15 puoltavat tätä ajatusta. Erityisesti radiaali- ja tangentialisuunnassa virheen hajonta kasvaa huomattavasti liian isoksi tilanteissa, joissa alkutilan kovarianssimatriisia ei ole nollattu. Normaalisuunnassa näin ei tapahdu.



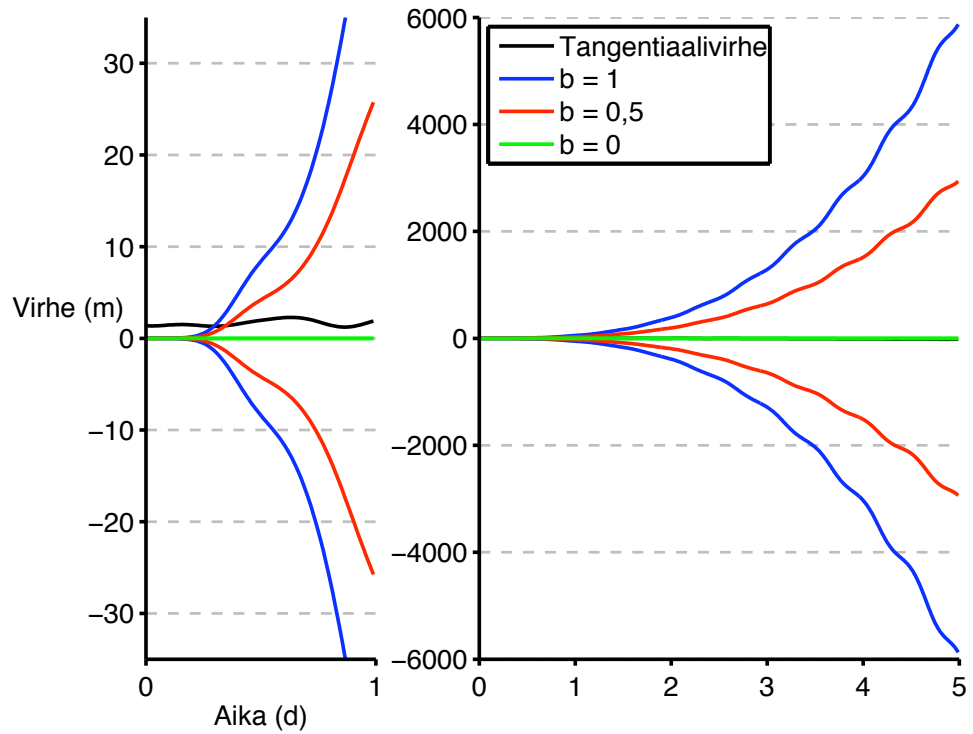
Kuva 5.10: Esimerkkiennustuksen radiaalivirhe ja vastaava keskihajonta σ , kun prosessikohinamatriisin Q kertoimena on käytetty muuttujaa b .



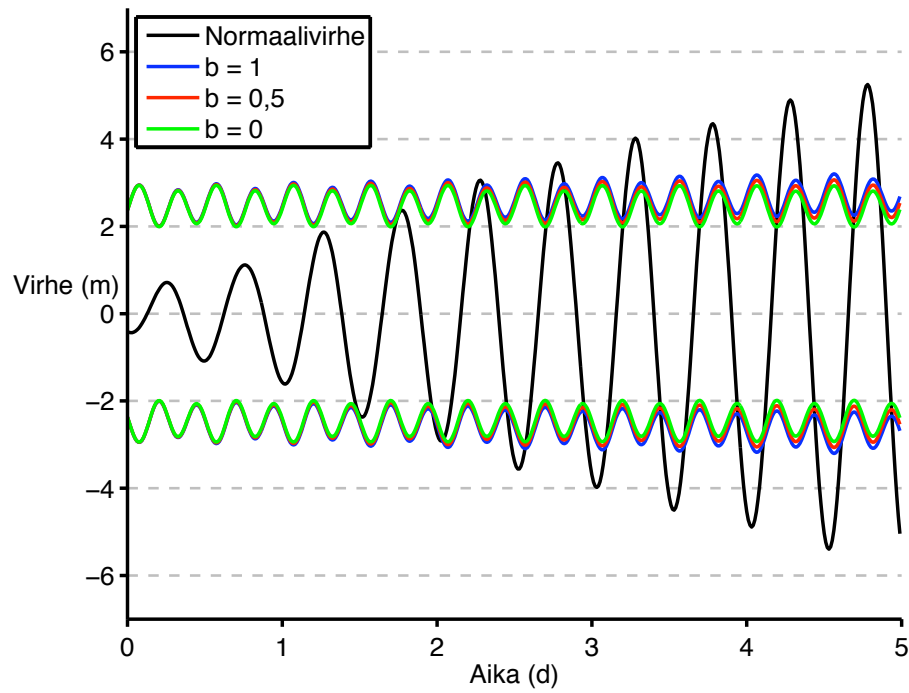
Kuva 5.11: Esimerkkiennustuksen radiaalivirhe ja vastaava keskihajonta σ , kun prosessikohinamatriisin Q kertoimena on käytetty muuttujaa b . Alkutilan sovituksen jälkeen prioritiedon kovarianssimatriisi on nollattu.



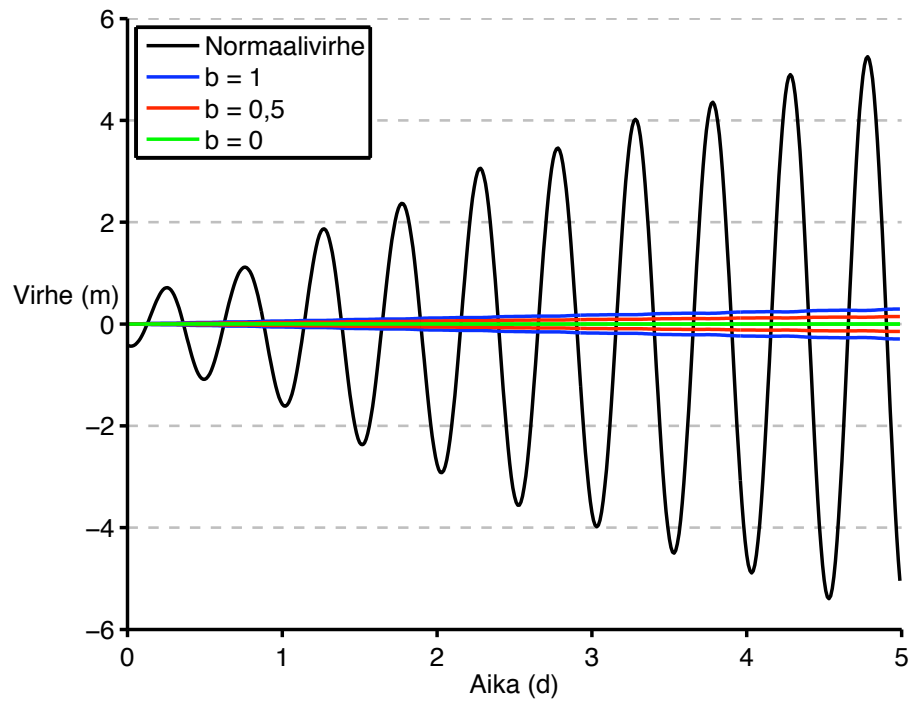
Kuva 5.12: Esimerkkiennustuksen tangentiaalivirhe ja vastaava keskihajonta σ , kun prosessikohinamatriisin Q kertoimena on käytetty muuttujaa b .



Kuva 5.13: Esimerkkiennustuksen tangentiaalivirhe ja vastaava keskihajonta σ , kun prosessikohinamatriisin Q kertoimena on käytetty muuttujaa b . Alkutilan sovituksen jälkeen prioritiedon kovarianssimatriisi on nollattu.



Kuva 5.14: Esimerkkiennustuksen normaalivirhe ja vastaava keskihajonta σ , kun prosessikohinamatriisin Q kertoimena on käytetty muuttujaa b .



Kuva 5.15: Esimerkkiennustuksen normaalivirhe ja vastaava keskihajonta σ , kun prosessikohinamatriisin Q kertoimena on käytetty muuttujaa b . Alkutilan sovituksen jälkeen prioritiedon kovarianssimatriisi on nollattu.

5.2.4 Havaintoja

Saatujen tulosten perusteella voidaan arvioida Gaussin mikstuurin käytön tarpeellisuutta satelliitin radan ennustuksessa. Kuvassa 5.1 esitettiin Gaussin mikstuurin komponentit viiden päivän ennustuksen jälkeen sekä niiden yhdistejakauma. Yhdistejakauma on hyvin lähellä Gaussista jakaumaa, jolloin Gaussin mikstuurin käytöstä ei ole suurta hyötyä. EKF:n oletus yksihiippuisesta Gaussisesta jakaumasta on siis riittävä.

Valituilla parametreilla sigmapistemenetelmässä jaetuilla Gaussin mikstuureilla ei kuvien 5.4-5.7 nojalla saavutettu hyötyä myöskään satelliitin radan ennustustarkkuudessa. Itse asiassa EKF-suodattimella ennustettaessa satelliitin rataa oli ennustusvirhe pienempi kuin GMF-suodattimella. Myös kaikkien käytettyjen menetelmien konsistenttiudet olivat likimain samat. EKF-suodattimen käyttöä puoltaa myös se, että GMF-suodatin on laskennallisesti raskaampi, sillä se suorittaa EKF:n GM-komponenttien lukumäärän kertaa. Tässä työssä komponentteja oli maksimissaan 17, jolloin GMF suorittaa EKF:n maksimissaan samaiset 17 kertaa.

Luku 6

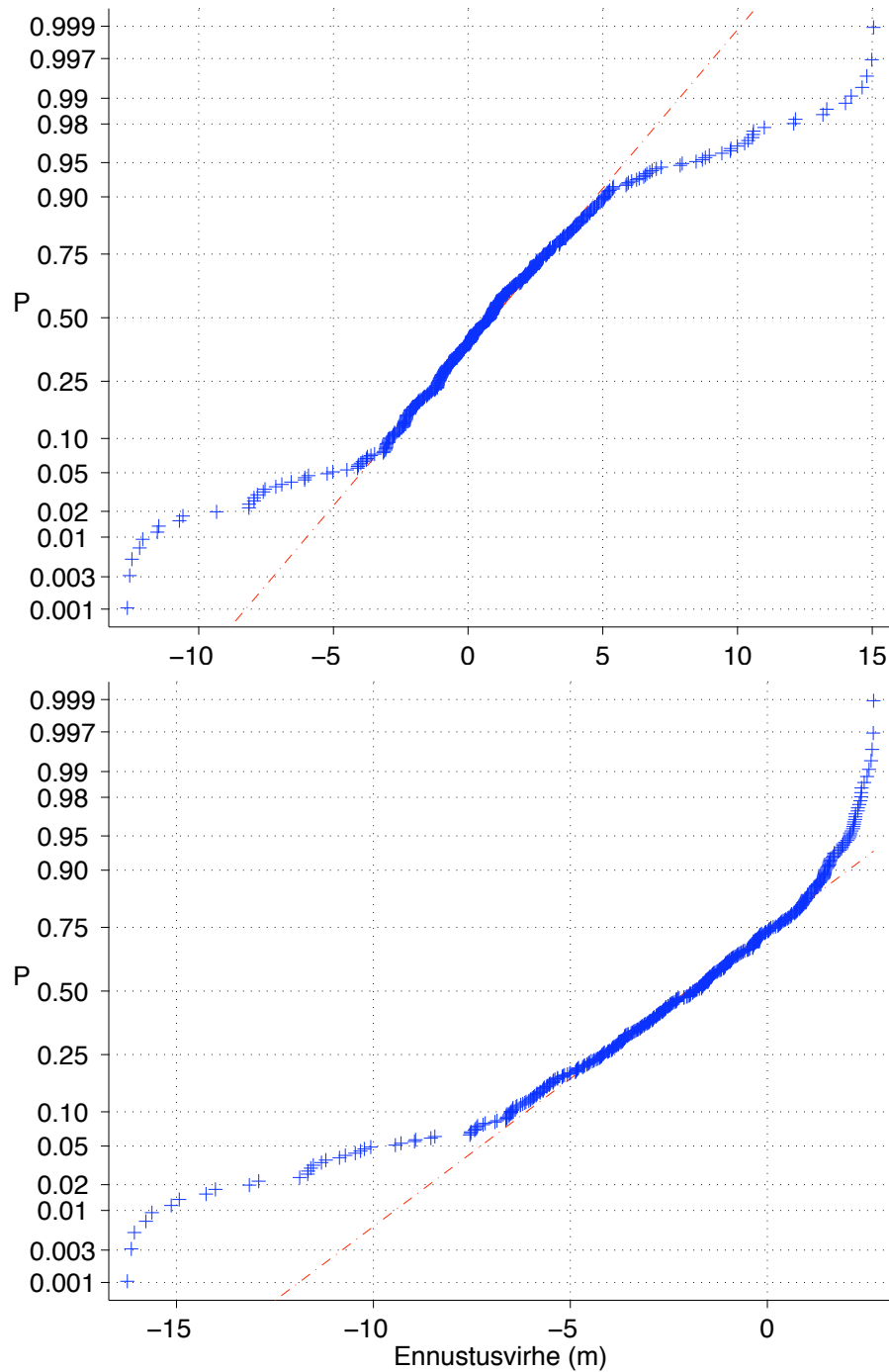
Tilamallin kehittäminen

Diplomityössä esitettyjä asioita tutkitaan aktiivisesti ja tässä luvussa esitetään yksi viimeisimmistä tutkimustuloksista.

Satelliitin rataa ennustettaessa EKF-suodattimella, herää kysymys ennustusvirheiden jakaumasta. Kuvassa 6.1 esitetään ennustusvirheiden jakauma paikan x- ja z-suunnassa ECEF-koordinaatistossa. Kuvassa virrehavainnot on merkattu sinisillä plusmerkeillä. Mikäli ennustusvirheet olisivat normaalijakautuneita, menisivät virrehavainnot punaista suoraa pitkin. Nyt kuvasta 6.1 kuitenkin havaitaan, että virheet eivät jakaudu normaalisti. Esimerkkikuvassa virhejakauma on piirretty satelliitille PRN 5 GPS-viikolla 1614.

Luvussa 5 esitettyjen tulosten laskennassa on käytetty prosessikohinamatriisina liitteessä B esitettyä vakiota. Lähteessä [3] on käytetty prosessikohinamatriisina diagonaalimatriisia

$$\mathbf{Q}_{\text{RTN}} = \begin{bmatrix} q_R & 0 & 0 \\ 0 & q_T & 0 \\ 0 & 0 & q_N \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$



Kuva 6.1: Ennustusvirheiden jakauma ECEF-koordinaatistossa paikan x - ja z -suunnassa.

Kaavassa (6.1) matriisin diagonaalilla olevat alkiot ovat radiaali-, tangentiaali- ja normaalisuuntaiset varianssit. Malli prosessikohinasta on jatkuva, jolloin se pitää diskretisoida ja Q_{RTN} muutetaan koko tilan kokoiseksi matriisiksi kertomalla sitä muunnosmatriisilla L [3, 22] :

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{G}(t_k, \tau) \mathbf{L}(\mathbf{x}(\tau)) \mathbf{Q}_{\text{RTN}} \mathbf{L}^T(\mathbf{x}(\tau)) \mathbf{G}^T(t_k, \tau) d\tau$$

Tällä prosessikohinamatriisilla saavutetaan parempi ennustustarkkuus ja konsistentius kuin tämän työn testeissä käytetyllä liitteessä B esitetyllä vakioprosessikohinamatriisilla, kuten lähteestä [3] voidaan todeta.

Luku 7

Yhteenveto

Tässä työssä ennustettiin satelliitin rataa käyttäen Bayesiläistä suodatusta. Rata ennustetaan muodostamalla satelliitille liikeyhtälö, jossa huomioidaan tärkeimmät satelliittiin vaikuttavat voimat. Liikeyhtälön numeerisen ratkaisun alkuarvoina käytettiin GPS-satelliittien oikeita paikka- ja nopeustietoja, jotka saadaan broadcast-efemeridistä. Motivaationa radan ennustuksessa on nopeuttaa GPS-paikannuslaitteen ensimmäisen paikkatiedon saamiseen kuluva aikaa, TTFF (time to first fix) siinä tilanteessa, että verkkoyhteyttä ei ole saatavilla tai se on maksullinen eikä sitä haluta käyttää.

Työssä tutkittiin antaako Gaussin mikstuuri -suodatin paremman ennustustarkkuuden kuin aiemmin käytetty laajennettu Kalmanin suodatin. Mittauksina käytettiin satelliitin lähettämiä broadcast-efemeridejä ja ennusteita verrattiin precise-efemerideihin. Gaussin mikstuuri -suodatinta testattiin kahdella eri menetelmällä: SPGM1, jossa GM-komponenttien jako tehdään ennen alkutilan sovitusta ja SPGM2, jossa GM-komponenttien jako tehdään alkutilan sovituksen jälkeen. MATLAB-ohjelmistolla lasketut ennusteet osoittavat, että GMF ei paranna ennustustarkkuutta EKF-suodattimeen verrattuna.

Ennustetusta radasta laskettiin radan 3D-virhe sekä radiaali-, tangentiaali- ja normaali- virheet. Kuvien 5.4-5.7 pohjalta havaitaan, että EKF antaa pienimmän ja SPGM1 suurimman 3D-virheen. Radiaalivirheet ovat kaikille menetelmille likimain

samat. Tangentiaalivirhe ja normaalivirhe on SPGM1-menetelmällä suurempi kuin kahdella muulla menetelmällä. Myös kaikkien kolmen menetelmän konsistenttiudet olivat likimain samat kuvan 5.9 perusteella.

Tässä työssä testattiin GMF-suodatinta vain sigmapistemenetelmällä tietyillä parametreilla ja komponenttien vähennykseen käytettiin komponenttien unohdusta. GM-komponenttien jakamiseen voisi käyttää myös esimerkiksi kappaleessa 3.2.2 esitettyä laatikkomenetelmää.

Suoritettujen testien perusteella voidaan arvioida, että satelliitin radan ennustus EKF-suodattimella ja sen asettamat oletukset ovat riittävän hyviä. GMF-suodattimesta ei ollut hyötyä satelliitin radan ennustuksen tarkkuudessa. Sen lisäksi GMF on laskennallisesti paljon raskaampi kuin EKF, sillä GMF suorittaa EKF:n jokaiselle komponentille erikseen, jolloin laskentakapasiteettia vaaditaan komponenttien lukumäärän kertaisesti verrattuna EKF-suodattimeen.

Tutkimusta voisi jatkaa esimerkiksi valitsemalla mittausmallin kovarianssimatriisin eri tavalla. Mittausmallin kovarianssin suuruus on väärä ja virhe ei ole välttämättä joka suuntaan sama, kuten kappaleessa 5.2.4 on pohdittu.

Luvussa 6 on esitetty ajatus erilaisesta prosessikohinamatriisista kuin mitä tässä työssä on käytetty. Tässä työssä prosessikohinamatriisi Q on liitteessä B esitetty vakio kun taas luvussa 6 esitetty kovarianssimatriisi on muuttuva satelliitin paikan suhteen eikä vakio. Tätä prosessikohinamatriisia käytettäessä ennustusvirhe on pienempi ja konsistenttius parempi.

Lähteet

- [1] An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. Presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18, 2008. URL <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/>.
- [2] IERS, 2013. URL <http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/data.html>. Viitattu 23.6.2013.
- [3] Juha Ala-Luhtala, Mari Seppänen, Simo Ali-Löytty, Robert Piché, and Henri Nurminen. Estimation of initial state and model parameters for autonomous GNSS orbit prediction. In *International Global Navigation Satellite Systems Society Symposium 2013 (IGNSS2013)*, July 2013. URL http://math.tut.fi/posgroup/AlaLuhtala_IGNSS2013.pdf.
- [4] Simo Ali-Löytty. Efficient Gaussian mixture filter for hybrid positioning. In *Proceedings of PLANS 2008 IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium*, pages 60–66, 2008. URL http://math.tut.fi/posgroup/ali-loytty_plans2008a.pdf.
- [5] Simo Ali-Löytty. On the convergence of the Gaussian mixture filter. Department of Mathematics. Research report 89, Tampere University of Technology, 2008. URL http://math.tut.fi/posgroup/aliloytty_report89a.pdf.
- [6] Simo Ali-Löytty and Niilo Sirola. Gaussian mixture filter in hybrid navigation. In *Proceedings of The European Navigation Conference GNSS 2007*, pages 831–837, Switzerland, May 2007. URL <http://math.tut.fi/posgroup/aliloyttyENC2007a.pdf>.
- [7] Simo Ali-Löytty and Niilo Sirola. Gaussian mixture filter and hybrid positioning. In *Proceedings of ION GNSS 2007, Fort Worth, Texas*, pages 562–570, Fort Worth, September 2007. URL http://math.tut.fi/posgroup/ali-loytty_sirola_ion2007a.pdf.
- [8] Yoaz Bar-Sever. Predicted Orbit and Clock States. URL <http://www.gdgps.net/products/predicted-orbit.html>. Viitattu 15.11.2012.
- [9] Yoaz E. Bar-Sever and William I. Bertiger. Method and Apparatus for Autonomous, In-Receiver Prediction of GNSS Ephemerides, patentti. 2008.

- [10] Przemyslaw Bogacki and Lawrence F. Shampine. A 3(2) pair of Runge–Kutta formulas. In *Applied Mathematics Letters* 2 (4), pages 321–325, 1989. doi: 10.1016/0893-9659(89)90079-7.
- [11] Nicholas J. Higham. *Functions of Matrices, Theory and Computation*. Siam, 2008.
- [12] IGS, 2013. URL <http://igsceb.jpl.nasa.gov/components/prods.html>. Viitattu 9.11.2013.
- [13] Andrew H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, Inc., New York, 1970.
- [14] David Kincaid and Ward Cheney. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Publishing Company, second edition, 1996.
- [15] Heikki Kosola. GNSS-satelliitin ennustetun kiertoradan esittäminen rataparametreinä. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, toukokuu 2012. URL <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tti-201206181198>.
- [16] Simo Martikainen. GPS-satelliitin kellopoikkeaman robusti estimointi. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, elokuu 2012. URL <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tti-201208301253>.
- [17] Oliver Montenbruck and Eberhard Gill. *Satellite Orbits*. Springer, 3rd edition, 2005.
- [18] Rx Networks. GPS Solutions. URL <http://rxnetworks.ca/solutions/gps>. Viitattu 15.11.2012.
- [19] Robert Piché. Stochastic processes. Opintomoniste, 2012. URL <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tti-201012021377>. Viitattu 3.10.2012.
- [20] Simo Särkkä. Bayesian estimation of time-varying processes: Discrete-time systems. Opintomoniste, 2011. URL http://www.lce.hut.fi/~ssarkka/course_k2011/pdf/course_booklet_2011.pdf. Viitattu 11.11.2013.
- [21] Simo Särkkä. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Cambridge University Press, 2013.
- [22] Simo Särkkä and Juha Sarmavuori. Gaussian filtering and smoothing for continuous-discrete dynamic systems. *Signal Processing*, 93(2):500–510, 2013.
- [23] Mari Seppänen. GPS-satelliitin radan ennustaminen. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, maaliskuu 2010. URL http://math.tut.fi/posgroup/seppanen_mscth.pdf.

- [24] Mari Seppänen, Tommi Perälä, and Robert Piché. Autonomous satellite orbit prediction. In *2011 International Technical Meeting*, San Diego, California, January 2011. URL <http://www.ion.org/meetings/abstract.cfm?meetingID=32&pid=72&t=C&s=2>.
- [25] Mari Seppänen, Juha Ala-Luhtala, Robert Piché, Simo Martikainen, and Simo Ali-Löytty. Autonomous prediction of GPS and GLONASS satellite orbits. *NAVIGATION*, (2):119–134, 2012. doi: 10.1002/navi.10.
- [26] Byron D. Tapley, Bob E. Schutz, and George H. Born. *Statistical Orbit Determination*. Elsevier Academic Press, 2004.

Liite A

Legendren polynomi

Tässä liitteessä on esitetty tarkemmin luvussa 4.1.1 tarvittava Legendren polynomi $P_n(x)$ sekä geopotentialikertoimet C_{nm} ja S_{nm} .

Määritellään Legendren polynomit $P_n(x)$ generoivan funktiona, $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$, Taylorin sarjakehitelmän kertoimiksi:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, |t| < 1$$

Tämä sarjakehitelmä suppenee, kun $|t| < 1$. [23]

Legendren liittopolynomi P_{nm} (associated Legendre polynomial) määritellään seuraavasti:

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u).$$

Seuraavaksi on esitetty geopotentialikertoimet C_{nm} ja S_{nm} maan pisteen (r, λ, φ) funktiona.

$$C_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M_E} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \left(\frac{r_2}{R_E} \right)^n P_{nm} \sin(\varphi) \cos(m\lambda) \rho(r) dr,$$

$$S_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M_E} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \left(\frac{r_2}{R_E} \right)^n P_{nm} \sin(\varphi) \sin(m\lambda) \rho(r) dr,$$

joissa $\rho(r)$ on Maan tiheys.

Liite B

Tilamallin prosessikohina

Luvussa 5 esitettyjen tuloksien laskennassa on tilamallin prosessikohinamatriisina käytetty matriisia Q:

$$\begin{bmatrix} 9.3284\text{E-}5 & -2.3636\text{E-}6 & 7.0373\text{E-}6 & 2.1531\text{E-}8 & -8.8339\text{E-}9 & -4.7121\text{E-}10 & -9.3730\text{E-}16 & -5.7566\text{E-}15 \\ -2.3636\text{E-}6 & 7.4334\text{E-}5 & 4.0173\text{E-}7 & 1.6958\text{E-}8 & 1.2976\text{E-}9 & -8.1584\text{E-}10 & -1.7991\text{E-}15 & -8.2758\text{E-}15 \\ 7.0373\text{E-}6 & 4.0173\text{E-}7 & 8.4313\text{E-}5 & 6.2143\text{E-}9 & -2.9963\text{E-}9 & 1.2169\text{E-}8 & 3.1392\text{E-}16 & 4.7910\text{E-}16 \\ 2.1531\text{E-}8 & 1.6958\text{E-}8 & 6.2143\text{E-}9 & 2.9003\text{E-}11 & -2.1279\text{E-}13 & 4.9068\text{E-}12 & -5.5073\text{E-}18 & -2.2133\text{E-}17 \\ -8.8339\text{E-}9 & 1.2976\text{E-}9 & -2.9963\text{E-}9 & -2.1279\text{E-}13 & 2.4797\text{E-}11 & 4.8357\text{E-}12 & -4.5161\text{E-}18 & -1.6072\text{E-}17 \\ -4.7121\text{E-}10 & -8.1584\text{E-}10 & 1.2169\text{E-}8 & 4.9068\text{E-}12 & 4.8357\text{E-}12 & 1.5959\text{E-}11 & -2.3550\text{E-}18 & -9.1941\text{E-}18 \\ -9.3730\text{E-}16 & -1.7991\text{E-}15 & 3.1392\text{E-}16 & -5.5073\text{E-}18 & -4.5161\text{E-}18 & -2.3550\text{E-}18 & 9.7538\text{E-}22 & 1.9119\text{E-}21 \\ -5.7566\text{E-}15 & -8.2758\text{E-}15 & 4.7910\text{E-}16 & -2.2133\text{E-}17 & -1.6072\text{E-}17 & -9.1941\text{E-}18 & 1.9119\text{E-}21 & 6.9537\text{E-}21 \end{bmatrix}.$$